



Transitions de Phase Quantiques dans le regime de couplage Ultrafort de l'Electrodynamique Quantique

Alexandre Baksic

► To cite this version:

Alexandre Baksic. Transitions de Phase Quantiques dans le regime de couplage Ultrafort de l'Electrodynamique Quantique. Physique [physics]. Universite Paris Diderot-Paris VII, 2014. Français. NNT: . tel-01122433

HAL Id: tel-01122433

<https://theses.hal.science/tel-01122433>

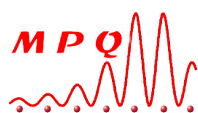
Submitted on 3 Mar 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives| 4.0 International License



Thèse de doctorat

Spécialité Physique

**Transitions de Phase Quantiques
dans le régime de couplage Ultrafort de
l'Electrodynamique Quantique**

présentée par

Alexandre BAKSIC

pour obtenir le grade de

**Docteur de l'Université Paris Diderot-Paris VII
Sorbonne Paris Cité**

Thèse dirigée par **Cristiano CIUTI**

Soutenue le 10 Octobre 2014

JURY :

Alexandre	BLAIS	Rapporteur
Peter	DOMOKOS	Rapporteur
Benjamin	HUARD	Examineur
Nicolas	ROCH	Examineur
Karyn	LE HUR	Présidente
Cristiano	CIUTI	Directeur

Remerciements

La thèse est une formidable aventure, à la fois périlleuse et incertaine mais également très enrichissante et gratifiante, un peu à la manière de l'exploration d'une contrée sauvage. En effet, en début de thèse, le doctorant est lâché au milieu d'une jungle sauvage, n'ayant aucune connaissance de la faune, de la flore ou des techniques de survie les plus rudimentaires au sein de cet environnement hostile. La survie du thésard ne tiendrait alors qu'à un fil si il n'était accompagné d'un aventurier chevronné (son directeur de thèse), qui l'accompagne et partage avec lui ses connaissances du milieu ainsi que les techniques de close combat les plus avancées. Malheureusement, bien que son équipement et son guide soient irréprochables, le doctorant se trouve bien souvent face à des obstacles, désorienté ou contraint de traverser des contrées hostiles, ce qui lui demande des efforts considérables et s'avèrent bien souvent vains. Cependant les rares fois où celui-ci franchit une étape décisive, ses efforts se voient amplement récompensés par une formidable découverte. Bien heureusement, en plus de l'accompagnement de son directeur de thèse, le doctorant bénéficie bien souvent de l'aide précieuse de différentes personnes qu'il rencontrera au cours de son périple et qui, en plus d'égayer son voyage, lui permettront de franchir des obstacles à priori insurmontables. Une fois aguerri et rompu aux techniques de survie, le doctorant devient à son tour un aventurier et peut alors prendre le temps, entre deux aventures, de remercier toutes ces personnes sans lesquelles cela n'aurait pas été possible.

Pour ce qui est de la fin du périple, je tiens à remercier les rapporteurs Alexandre Blais et Peter Domokos pour avoir accepté de prendre sur leur temps afin d'évaluer minutieusement mon manuscrit de thèse. Votre expérience d'aventuriers aguerris et vos remarques m'ont permis de grandement améliorer la qualité du manuscrit. Je tiens également à remercier les examinateurs Benjamin Huard et Nicolas Roch, ainsi que la présidente du Jury Karyn Le Hur qui ont accepté de prendre sur leur temps pour assister à ma soutenance de thèse. Vos questions et vos remarques très pertinentes m'ont permis d'avoir une réflexion plus profonde sur les concepts abordés durant ma thèse.

Pour ce qui est du déroulement de mon périple, je souhaite tout d'abord à remercier chaleureusement Cristiano que j'ai eu l'honneur et le plaisir d'avoir comme guide à travers les chemins boueux. Tu as su non seulement m'enseigner les techniques de survie en milieu hostile et remis sur le droit chemin lorsque je m'égarais, mais tu m'as également soutenu dans mon aventure en me convainquant de persévérer même lorsque je n'y croyais plus, faisant ainsi preuve d'un optimisme désormais légendaire. De plus, ton humour, ta disponibilité et ta bonne humeur ont rendu très agréables nos interactions autant sur le plan scientifique que sur le plan humain. J'ai également apprécié la liberté que tu m'as laissé concernant les sujets explorés durant ma thèse, ce qui m'a permis d'acquérir une grande autonomie en matière de recherche. Je reste encore aujourd'hui impressionné par ta grande culture scientifique. J'espère par ailleurs que notre aventure ne s'arrêtera pas là et que nous aurons la chance de collaborer à nouveau dans le futur.

Je tiens également à remercier un autre aventurier en herbe qui m'a accompagné durant tout mon périple, Juan (aka Juju ou Jean-Sébastien), qui tout comme moi a réussi à y survivre (ouf!) et est à présent un aventurier confirmé. Désolé de t'avoir fait passer du côté obscur de la blague, j'ai conscience d'avoir volé ton innocence, j'espère qu'Estelle me pardonnera. J'ai beaucoup apprécié ta bonne humeur, ton honnêteté, ton optimisme, ainsi que nos pauses récréatives sur la terrasse du 7ème (à 13h, 16h et 18h pour ne parler que des régulières) de même que nos discussions (scientifiques ou moins), qui m'ont permis de comprendre de manière plus profonde certains concepts physiques, mais surtout de me (nous?) détendre en parlant de choses un peu moins graves mais ô combien plus marrantes. En espérant pour toi que tout se passe bien pour la suite même si je n'en doute pas aux vues de tes qualités.

J'ai également eu la chance de rencontrer Alexandre à l'issue de ma première année de thèse, lorsqu'il a décidé de rejoindre cette magnifique aventure qu'il est à présent en passe de terminer (plus qu'un petit effort, tu y es presque!). Merci à toi pour ta bonne humeur, ton humour, ton talent d'imitateur inimitable, ainsi que pour nos discussions historiques et politiques dont tu as pu élever le niveau grâce à ta culture. Je tiens également à te remercier pour la motivation et l'envie d'apprendre de nouvelles techniques que tu as su me communiquer (Keldysh, fonctions de Green,...) et même si je n'ai jamais vraiment persévéré, cela m'a tout de même permis de m'enrichir. J'ai également beaucoup apprécié collaborer avec toi en ce qui concerne le 'Corner Wave Function Monte-Carlo', notamment les discussions et les échanges d'idées que nous avons eu. Merci au passage pour tes conseils particulièrement pertinents concernant les séries (the Wire, Treme, the Sopranos,

Generation Killed,...). Bonne chance pour ton postdoc et ta fin de thèse, bien que je ne me fasse pas trop de soucis pour toi après avoir eu la chance de te côtoyer.

Durant mon périple j'ai également eu la chance (ou la malchance ?) de rencontrer Loïc (aka le Breton) qui a su imposer une discipline militaire au sein du thésarium dans lequel nous nous trouvions, n'hésitant pas à employer la force lorsque cela s'avérait nécessaire afin d'imposer un semblant d'ordre. Plus sérieusement, j'ai beaucoup apprécié nos discussions concernant certains détails mathématiques qui parfois m'échappaient mais qui étaient limpides pour toi en raison de ta formation et de ton goût particulier pour la rigueur. Je tiens également à te remercier pour tes précieux conseils de lecture (Asimov, Fortune de France,...) que j'ai beaucoup appréciés. Je tiens par ailleurs à m'excuser si mon humour a parfois pu te choquer, même si j'ai souvent eu l'impression que tu t'offusquais uniquement pour faire bonne figure, bien que tu en appréciais bien souvent la forme (peut-être plus que le fond). Bonne chance à toi pour ta seconde vie au sein de la DGA, ce qui devrait te combler quand on sait à quel point la discipline t'est chère.

Je tiens aussi à remercier mon premier stagiaire, Jared (aka le Hippie ou Djarréd) pour sa bonne humeur, sa joie de vivre, son sens de l'auto dérision ainsi que son humour très Italien. J'ai beaucoup apprécié notre collaboration concernant le 'ancillary qubit' durant laquelle tu as fait preuve d'un très bon sens physique en posant des questions profondes en face desquelles je me suis moi-même parfois retrouvé en difficulté. Tu as également démontré que tu es capable de t'adapter rapidement à des situations ainsi que des techniques nouvelles. Je n'ai malheureusement pas pu te consacrer autant de temps que j'aurais voulu, mais tu t'es tout de même très bien débrouillé. Bonne chance pour la suite, j'espère que tu apprécieras cette aventure autant que moi, n'hésite pas à échanger avec d'autres doctorants sur tes impressions et tes sentiments (surtout à l'approche du blues de mi-thèse).

Je tiens également à remercier les autres thésards que j'ai pu croiser, mais avec lesquels je n'ai pas eu la chance de collaborer. Tout d'abord merci à Jean-Baptiste (aka JB) pour les soirées passées chez toi (souvent arrosées) dont je garde un souvenir impérissable. Merci également pour ta bonne humeur ainsi que pour avoir su à la fois apprécier mais également participer à mes blagues particulières, ce qui m'a incité à persévérer (dommage pour les autres...). Merci également à Jonathan (aka Jo ou Gérard) qui a également fait partie du noyau dur des supporters de mes blagues, et avec lequel j'ai eu la chance de partager de nombreuses bières rituelles du Vendredi soir. Merci à Hélène qui a certainement été la seule représentante de la gente féminine à

apprécier et à participer à mes blagues. Merci à toi pour tes fameux gâteaux qui ont été un vrai régal pour mes papilles. Merci enfin à Siham, Constance et Charlotte qui ont su apporter la touche féminine qui manquait à notre thésarium et même si mon humour n'était pas forcément de votre goût j'espère que vous ne m'en tiendrez pas rigueur.

Pour terminer, je tiens à remercier tout particulièrement mes parents et mes frères et soeurs qui m'ont toujours soutenu dans mes démarches ainsi que dans mes études, aussi bien financièrement que moralement. Sans votre soutien je ne serais pas là où j'en suis actuellement, j'espère que vous vous en rendez compte et que vous en retirerez une certaine fierté. Malheureusement les mots me manquent pour vous exprimer ma gratitude, mais je pense que vous comprendrez.

Je tiens également à remercier tout spécialement et chaleureusement Kelly, qui a partagé ma vie ainsi que ma condition de doctorant durant ces quatre dernières années et a réussi à parvenir à la fin de l'aventure avant moi. Je mesure à présent quelle chance cela a été de pouvoir bénéficier de ta présence et de bien plus encore. Grâce à ta compréhension et à ton soutien j'ai réussi à me surpasser et à effacer certains doutes, mais également à me concentrer sur ce qui était important.

Table des matières

Introduction	9
1 Electrodynamique Quantique.	19
1.1 Electrodynamique Quantique en cavité (cavity-QED)	19
1.1.1 Modélisation de l'interaction lumière-matière : l'Hamiltonien de Jaynes-Cummings	19
1.2 Electrodynamique des circuits (circuit-QED)	26
1.2.1 Qu'est ce qu'un circuit quantique ?	28
1.2.2 Variables pertinentes pour la description des circuits.	29
1.2.3 Ligne de transmission coplanaire : la cavité Fabry-Pérot supraconductrice.	30
1.3 Les différents types d'atomes artificiels en Circuit-QED	41
1.3.1 La boîte à paires de Cooper (CPB).	41
1.3.2 Le qubit de flux (RF squid)	46
1.3.3 Effet du couplage à l'environnement	50
1.3.4 Les différents types de couplage entre atomes artificiels et ligne de transmission	56
1.4 Régime de couplage ultra-fort.	59
1.4.1 Modèle de Rabi vs. modèle de Jaynes-Cummings.	59
2 Modèle de Dicke	67
2.1 Hamiltonien de Dicke	68
2.2 La limite thermodynamique ($N_{at} \rightarrow \infty$) : transition de phase associée au modèle de Dicke.	69
2.2.1 Transition de phase classique	69
2.2.2 Etude de la transition de phase quantique (à $T = 0$)	71
2.3 Propriétés de taille finie	81

2.3.1	Valeur moyenne des observables en taille finie.	81
2.3.2	La brisure spontanée de symétrie en taille finie.	81
2.4	Stabilité de l'état fondamental	94
2.5	Unique réalisation expérimentale à ce jour : Modèle de Dicke hors équilibre.	97
3	Théorème No-go pour les transitions de phase superradiantes	101
3.1	Terme diamagnétique (A^2)	102
3.2	Règle de somme de Thomas-Reiche-Kuhn (TRK)	104
3.3	Lien entre l'amplitude du terme diamagnétique et du terme de couplage dipolaire électrique	105
3.4	Théorème No-go pour les transitions de phase superradiantes dans le cas d'un ensemble de systèmes à deux niveaux.	106
3.5	Existe-t-il un théorème No-go pour les transitions de phase superradiantes dans le cas d'un ensemble de systèmes à trois niveaux ? [10]	109
3.5.1	Tentative malheureuse de généralisation du théorème No-go au cas multi niveaux. [134]	109
3.5.2	Modèle et contraintes TRK	110
3.5.3	Transformation de Holstein-Primakoff généralisée.	112
3.5.4	Méthode de détermination du diagramme de phase	113
3.5.5	Diagramme de phase dans différents cas	114
3.5.6	Problème de Schrödinger inverse	118
3.6	Théorème No-go en circuit-QED	120
4	Modèle de Dicke avec symétrie discrète (\mathbb{Z}_2) ou continue ($U(1)$) contrô- lable en circuit-QED [9].	125
4.1	Symétrie de l'interaction lumière-matière en cavity-QED et en circuit-QED.	126
4.2	Hamiltonien d'un qubit couplé à la fois capacitivement et inductivement à une ligne de transmission	128
4.3	Généralisation à un nombre arbitraire de qubits	132
4.3.1	Symétries de l'Hamiltonien	133
4.3.2	Limite thermodynamique	134
4.3.3	Etude du modèle général en taille finie	142
4.3.4	Etude du modèle de Dicke avec symétrie $U(1)$ (Tavis-Cummings) en taille finie	142
	Conclusion et perspectives	161

Introduction

L'étude de l'interaction de la lumière et de la matière est un sujet extrêmement ancien qui prend ses racines en Assyrie, à peu près 700 ans avant JC avec la création des premières lentilles. Il faudra attendre près d'un millénaire pour que la première modélisation mathématique du phénomène de réfraction de la lumière (à la base du principe des lentilles) voit le jour grâce à Claude Ptolémée (≈ 90 -168) qui mesura l'angle de réfraction entre l'air, l'eau et le verre, falsifiant ses résultats afin qu'ils concordent avec son idée que l'angle de réfraction doit être proportionnel à l'angle d'incidence (ce qui est une bonne approximation de la loi de Snell-Descartes pour des angles faibles, mais faux par ailleurs), l'optique géométrique est née. Il faudra alors attendre jusqu'au XVII^{ème} siècle pour que Willebrord Snell (1580-1626) et René Descartes (1595-1650) trouvent de manière indépendante la loi de Snell-Descartes qui décrit le phénomène de réfraction et réflexion de la lumière à une interface entre deux milieux de manière satisfaisante. Newton remarquera peu de temps après qu'un prisme est capable de décomposer la lumière blanche en couleurs primaires, qu'il est possible de recomposer à l'aide d'une lentille et d'un autre prisme. L'histoire de l'optique prend une nouvelle dimension avec l'observation pour la première fois par le physicien Italien Francesco Maria Grimaldi (1618-1663) de l'effet de diffraction de la lumière. Un siècle et demi plus tard, le physicien anglais Thomas Young (1773-1829) observera pour la première fois le phénomène d'interférence de deux sources cohérentes grâce au célèbre dispositif de fentes d'Young. Il expliquera ce phénomène par l'interférence des ondes émanants des deux fentes, l'optique ondulatoire est née. Quelques années plus tard, le physicien Français Augustin-Jean Fresnel (1788-1827) apportera une contribution majeure à la compréhension des phénomènes de diffraction et d'interférences (qui possèdent tous deux la même origine), en posant les bases de la théorie de l'optique ondulatoire que nous utilisons encore de nos jours. Pour la première fois dans l'histoire de la physique apparaît la notion de dualité onde-corpuscule : la lumière peut tantôt se comporter comme un ensemble de particules se propageant en lignes droites, tantôt comme une onde

pouvant donner lieu au phénomène d'interférence, selon les conditions expérimentales. Cette nouvelle théorie sera capable d'expliquer tous les phénomènes optiques observés jusqu'alors excepté le rayonnement du corps noir et la structure en raies du spectre d'émission (ou d'absorption) des atomes, notamment de l'atome d'hydrogène. Dans ce contexte, le 27 Avril 1900 à Londres, Lord Kelvin (alias William Thomson) présente, lors un discours resté célèbre [80], son point de vue concernant l'état des connaissances en Physique au début du XX^{ème} siècle :

"The beauty and clearness of the dynamical theory, which asserts heat and light to be modes of motion, is at present obscured by two clouds :

I. The first came into existence with the undulatory theory of light, and was dealt with by Fresnel and Dr. Thomas Young; it involved the question, How could the earth move through an elastic solid, such as essentially is the luminiferous ether ?

II. The second is the Maxwell-Boltzmann doctrine regarding the partition of energy."

Lord Kelvin.

Les deux nuages dont Lord Kelvin parle donneront naissance par la suite aux plus grandes théories du XX^{ème} siècle : le premier aux théories de la Relativité restreinte [50] et générale [51] et le second à la Mécanique Quantique dont il sera question tout au long de ce manuscrit. Pour expliquer le rayonnement du corps noir (également connu sous le nom de catastrophe ultraviolette), Max Planck en 1899 [110] doit supposer que la lumière est émise par la matière sous forme de quantas (auxquels G.N. Lewis donnera plus tard le nom de photons[92]) : la théorie des quanta, qui prendra par la suite le nom de mécanique quantique, est née. Une preuve supplémentaire de cette quantification de l'énergie à l'échelle atomique, sera donnée par l'explication de l'effet photoélectrique d'Albert Einstein en 1905 [49]. Le spectre de l'atome d'hydrogène sera quant à lui expliqué par Bohr en 1913 [20] en reprenant le modèle planétaire de Rutherford auquel il ajoutera un ingrédient purement quantique : la quantification du moment cinétique de l'électron, qui l'empêche de s'effondrer sur le noyau. La naissance de la mécanique quantique a ainsi permis de comprendre et d'explorer les phénomènes d'interaction entre la lumière et la matière à une nouvelle échelle : l'échelle atomique. Cette discipline porte le nom d'optique quantique et cette thèse s'inscrira dans le cadre de celle-ci.

L'optique quantique s'appuie sur le formalisme de la mécanique quantique qui est tout à fait particulier, souvent contre-intuitif voir même décevant pour certains comme Albert Einstein. En effet, la mécanique classique prédit avec exactitude le comportement de systèmes sans avoir à faire appel à un observateur externe, i.e. que les propriétés (vitesse, position, etc...) du système d'étude existent indépendamment du fait qu'elles soient mesurées. En mécanique quantique en revanche, l'observateur ainsi que son interaction avec le système d'étude sont tout à fait centraux : ce dernier n'acquiert une propriété (valeur d'une observable) qu'une fois que celle-ci est mesurée, elle ne préexiste pas à la mesure. La question même de l'existence de la valeur d'une observable indépendamment du fait qu'elle soit mesurée n'a pas de sens en mécanique quantique qui est une théorie de la mesure, ce qui a beaucoup déplu à Einstein [108] :

"We often discussed his notions on objective reality. I recall that during one walk Einstein suddenly stopped, turned to me and asked whether I really believed that the moon exists only when I look at it."

A. Pais.

De plus, l'équation centrale de la mécanique quantique, l'équation de Schrödinger porte sur un objet très particulier : la fonction d'onde. Cette équation permet de décrire comment la fonction d'onde se comporte dans le temps et l'espace de manière déterministe. Cependant la fonction d'onde ne décrit pas l'état du système d'étude, elle décrit l'information qu'un observateur possède à priori sur celui-ci par l'intermédiaire de probabilités. L'équation de Schrödinger décrit ainsi l'évolution de ces probabilités, et permet de prédire en moyenne (i.e. en moyennant sur un grand nombre d'expériences identiques) comment vont se comporter les observables lors d'une expérience. Ceci a pour conséquence que lors d'une unique expérience, on ne peut avoir aucune certitude concernant le résultat de la mesure de la valeur d'une observable, ce qui entraîne des fluctuations d'une mesure à l'autre qui sont d'origine purement quantiques, ce qui a également beaucoup déplu à Einstein [73] :

"As I have said so many times, God doesn't play dice with the world."

A. Einstein.

Il est tout de même bon de rappeler que malgré toutes les critiques qu'a pu faire Einstein à l'encontre de la description théorique de la mécanique quantique, il a activement participé à son élaboration par l'intermédiaire d'idées et de concepts extrêmement profonds [125] et ce même en pensant porter un coup de grâce à la théorie de l'époque, en mettant en évidence un de ses aspects les plus spectaculaire à savoir l'intrication, dans son célèbre article concernant le paradoxe EPR [52]. Dans cet article Einstein, Podolsky et Rosen mettent en évidence une prédiction à priori paradoxale de la mécanique quantique : l'existence de corrélations entre les mesures faites sur deux (ou plus) objets même lorsque ceux-ci sont séparés par des distances telles qu'aucune interaction à distance ne puisse avoir lieu. Ce phénomène porte le nom d'intrication : les deux (ou plus) objets ne peuvent plus être vus comme deux entités distinctes, ils font partie d'une seule et même entité de laquelle découlent des corrélations d'origine quantique.

Cependant l'hypothèse de quantification du champ électromagnétique n'est pas nécessaire pour expliquer les expériences dont il a été question jusqu'à présent (rayonnement du corps noir, effet photoélectrique,...), seul une hypothèse de quantification de la matière l'est réellement. C'est en 1927 qu'apparaît la première description quantique du champ électromagnétique, proposée par Paul A. M. Dirac [48], puis reprise par Enrico Fermi sous une forme plus moderne en 1932 [56]. Cette quantification de la lumière est mise en évidence pour la première fois en 1947, grâce à l'expérience de Willis Lamb and Robert Retherford [87] qui met en évidence le "déplacement de Lamb" (Lamb shift), qui est une différence entre la valeur mesurée de la fréquence de la transition entre les niveaux $1s_{1/2}$ et $2p_{1/2}$ de l'atome d'hydrogène et la valeur prédite théoriquement par l'équation de Dirac. Ce phénomène sera expliqué par Hans Bethe [17] la même année en supposant qu'il résulte de l'interaction de l'électron avec les "fluctuations du vide" qui nécessitent une hypothèse de quantification du champ électromagnétique : les photons virtuels du vide "habillent" l'atome d'hydrogène et modifient ainsi ses propriétés. Ces travaux stimuleront le développement d'une théorie de l'électrodynamique quantique qui vaudra un prix Nobel à Julian Schwinger, Richard Feynman et Sin-Itiro Tomonaga en 1965.

La première expérience d'optique quantique est réalisée en 1977 par Kimble, Dagenais et Mandel [81] et met en évidence pour la première fois le phénomène d'antibunching (statistique sub-Poissonienne) dans une source à photon unique qu'il n'est pas possible d'expliquer avec une théorie "classique" de la lumière. De plus, l'effet de la quantification de la lumière n'est plus une simple renormalisation des constantes de la matière : la statistique de la lumière est elle aussi non classique (quantique). Ces résultats expérimentaux

taux ont pu être compris et expliqués grâce aux travaux théoriques de Roy J. Glauber qui portent sur la cohérence optique et les corrélations photoniques [61, 60]. En addition à ces travaux, Purcell a montré en 1946 qu'en plaçant les atomes au sein d'une cavité, il était possible de modifier l'interaction de ces derniers avec les fluctuations du vide (la densité de modes au sein de la cavité est plus faible que dans l'espace libre en raison des conditions aux limites imposées par les miroirs), ce qui permet de contrôler leurs propriétés "habillées" (contrôler les effets du Lamb shift en quelques sortes) tel que leur spectre ou leur couplage aux fluctuations du champ électromagnétique.

C'est dans ce contexte, que l'électrodynamique quantique en cavité (Cavity-QED) apparaît, s'intéressant à l'interaction entre un champ électromagnétique et un (ou plusieurs) atome(s) en cavité. Le champ électromagnétique au sein de la cavité (à une dimension et de longueur L pour la discussion) est quantifié et décrit par le potentiel vecteur \mathbf{A} , le champ électrique \mathbf{E} et le champ magnétique \mathbf{B} suivants :

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \sum_n \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_n L \varepsilon_0}} (\hat{a}_n + \hat{a}_n^\dagger) \cos(k_n x) \mathbf{e}, \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -i \sum_n \sqrt{\frac{\hbar \omega_n}{2L \varepsilon_0}} (\hat{a}_n - \hat{a}_n^\dagger) \cos(k_n x) \mathbf{e}, \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{c} \sum_n \sqrt{\frac{\hbar \omega_n}{2L \varepsilon_0}} (\hat{a}_n + \hat{a}_n^\dagger) \sin(k_n x) \mathbf{e}_x \times \mathbf{e},\end{aligned}\tag{1}$$

avec ω_n la fréquence des modes quantifiés du champ électromagnétique au sein de la cavité (indexés par n), $k_n = \omega_n/c$ le vecteur d'onde associé et \mathbf{e} un vecteur unitaire donnant la direction du potentiel vecteur \mathbf{A} . Ainsi, les champs électrique et magnétique au sein de la cavité représentent les deux quadratures du champ électromagnétique ($E \propto -i \sum_n (\hat{a}_n - \hat{a}_n^\dagger) \cos(k_n x)$ et $B \propto \sum_n (\hat{a}_n + \hat{a}_n^\dagger) \sin(k_n x)$, analogues aux l'impulsions p_n et positions x_n d'un ensemble d'oscillateurs harmoniques quantiques) et à ce titre fluctuent au sein de la cavité : le vide n'est pas vide. Ainsi, bien qu'en moyenne les champs électrique et magnétique soient nuls au sein de la cavité, à un instant précis ou une position précise, ils ont peu de chance de l'être. Plus précisément, en introduisant la cohérence photonique $\alpha_n = \langle \hat{a}_n \rangle$ ($\alpha_n \in \mathbb{C}$), la distribution de probabilité pour le mode n du champ électromagnétique de posséder une cohérence α_n est donnée par une loi Gaussienne $P(\alpha_n) = (1/\pi) \exp(-|\alpha_n|^2)$, les champs électrique et magnétique 1 ont ainsi une valeur non nulle (bien qu'elle le soit en moyenne), fluctuant d'une mesure à l'autre. Grâce aux développements technologiques, les expériences de Cavity-QED ont pu at-

teindre des régimes de couplage lumière-matière de plus en plus importants tout en augmentant le temps de vie des photons au sein de la cavité [113, 97]. Ceci a permis d'atteindre le régime de couplage dit "fort" dans lequel la cavité et l'atome peuvent échanger des excitations de manière cohérente [30] (oscillations de Rabi), il est également possible de créer des superpositions quasi macroscopiques d'états quantiques (chats de Schrödinger) permettant d'explorer le phénomène de décohérence [29], i.e. de perte de cohérence quantique laissant place à un comportement classique (statistique classique) du système. Ces travaux, et bien d'autres encore, qui reposent sur le régime de couplage "fort", ont été récompensés par le prix Nobel de Serge Haroche en 2012. Il est possible d'augmenter encore l'interaction lumière-matière au sein de la cavité en y mettant un nombre important d'atomes identiques [128] ou en substituant les atomes par d'autres dispositifs tels que des semiconducteurs [66, 67, 119] dans lesquels le nombre de porteurs de charges peut être macroscopique permettant ainsi d'atteindre le régime de couplage dit "ultrafort" dans lequel la fréquence de Rabi du vide (quantité qui rend compte de l'interaction lumière-matière) est supérieure à la fréquence de transition atomique.

Il existe une discipline similaire à la cavity-QED, l'électrodynamique quantique des circuits (circuit-QED) qui est le fruit de la maîtrise d'un phénomène quantique pouvant être macroscopique : la supraconductivité [12]. La supraconductivité résulte d'une transition de phase qui a lieu en deçà d'une certaine température critique (qui dépend du matériau) entre une phase métallique et une phase supraconductrice (caractérisée par un paramètre d'ordre complexe $\delta e^{i\varphi}$, possédant une phase φ) qui, entre autres choses, conduit le courant sans résistance (sans dissipation). De plus, l'effet Josephson, découvert en [77] par Brian Josephson en 1962 prédit qu'il doit exister une interaction fortement non linéaire entre deux supraconducteurs séparés par une barrière d'isolant, ce qui a pour la première fois été observé dans les années 1963 par P. W. Anderson et J. M. Rowell [6]. Le degré de liberté caractérisant cet effet, la différence de phase $\Delta\varphi$ entre les deux supraconducteurs (liée à la différence de tension entre ceux-ci par la relation $\Delta\varphi = (2e/\hbar) \int dt V(t)$) est une variable quantique, ce qui a pour la première fois été observé expérimentalement à la fin des années 80 par M. H. Devoret, J. M. Martinis et J. Clarke [44, 95]. Grâce à cette non linéarité et au caractère quantique de la phase, il est alors possible de réaliser des dispositifs électroniques quantiques possédant un spectre anharmonique que l'on appelle atomes "artificiels" (dans le cas de vrais atomes, c'est l'interaction Coulombienne $\propto 1/r$ qui crée la non linéarité du spectre atomique). L'avantage de ces atomes artificiels est qu'il est possible grâce à des techniques de fabrication héritées de l'industrie micro-électronique et par conséquent bien maîtrisées, de contrôler leur propriétés (spectre, états propres)

lors du processus de fabrication. Il est même possible de contrôler leurs propriétés in situ par l'intermédiaire de courants et de tensions. De la même manière qu'il existe un grand nombre d'atomes "naturels" différents, il existe également un nombre important d'atomes "artificiels" supraconducteurs qu'on peut classer en deux grandes catégories : les atomes de type charge [24, 101, 84] (qui sont contrôlés par des tensions) et les atomes de type flux [98, 94] (qui sont contrôlés par des flux magnétiques i.e. des courants). Il est alors possible de se ramener à une situation similaire à celle de la cavity-QED en plaçant ces atomes artificiels au sein d'une ligne de transmission qui consiste en un fil supraconducteur interrompu en ses deux extrémités par des condensateurs (qui jouent ici le rôle des miroirs en cavity-QED). Les équivalents des champs électrique et magnétique au sein de la cavité en cavity-QED sont alors le courant et la tension au sein de la ligne de transmission : ainsi ce sont les fluctuations de ces degrés de liberté avec lesquels interagissent avec les atomes artificiels. La faible dimension de la ligne de transmission (quasiment unidimensionnel) et le fait que les variables de courant et de tension soient macroscopiques, permettent d'atteindre des régimes de couplage bien plus importants en circuit-QED qu'en cavity-QED, ce qui fait de cette discipline un candidat idéale pour atteindre le régime de couplage ultrafort [42, 25, 109, 106, 104, 103, 8]

Une question se pose alors naturellement : pourquoi chercher à atteindre le régime de couplage ultrafort ?

En régime de couplage fort les effets, sur l'atome, du couplage aux fluctuations électromagnétique sont faibles : ses propriétés sont légèrement modifiées. En régime de couplage ultrafort en revanche, les propriétés de l'atome et du rayonnement sont modifiés de manière drastique : parler d'atomes et de photons n'a plus aucun sens, ces deux entités ne sont plus distinctes et légèrement perturbées par leur interaction mutuelle, les états propres du système sont alors des états hybrides lumière-matière (également appelés polaritons en limite thermodynamique $N_{at} \rightarrow \infty$, N_{at} étant le nombre d'atomes dans la cavité). Ces nouveaux états hybrides possèdent des propriétés particulièrement intéressantes puisque l'état fondamental de ce système hybride n'est plus composé du vide de photons et des atomes dans leur état fondamental mais plutôt d'un état dans lequel le nombre de photons est non nul et les atomes sont polarisés. Plus précisément, l'état fondamental et le premier excité sont des états chat de Schrödinger photo-atomiques quasi dégénérés (l'un étant paire et l'autre impaire). L'état chat de Schrödinger de plus basse énergie étant l'état fondamental du système, se trouve être robuste face au bruit auxquels ce dernier peut être soumis et il n'existe à priori pas de limite quant à sa taille. En

limite thermodynamique ($N_{at} \rightarrow \infty$), l'Hamiltonien qui décrit ce système (l'Hamiltonien de Dicke) permet de prédire qu'à un certain couplage critiques lumière-matière, une transition de phase quantique d'ordre 2 a lieu [54, 53], le système passant d'un état dit normal (son fondamental contenant un nombre faible de photons et d'excitations atomiques par rapport à N_{at}) à un état dit "superradiant" (le fondamental contenant un nombre macroscopique de photons et d'excitations atomiques, de l'ordre de N_{at}), la symétrie brisée accompagnant la transition de phase étant discrète (symétrie de parité). Cependant, en cavity-QED l'existence de ces états semble remise en cause par le "No-go theorem" [58, 116, 117] concernant les transitions de phase superradiante. En effet, le modèle de Dicke n'inclut pas de terme A^2 qui résulte du couplage standard minimal entre le champ électromagnétique et les charges (et garantit l'invariance de jauge de l'électrodynamique quantique) et doit être pris en compte lorsqu'on s'intéresse au régime de couplage ultrafort. Sous certaines hypothèses (approximation de système à deux niveaux, approximation à un mode, approximation des grandes longueurs d'ondes), ce théorème prédit que la transition de phase superradiante ne peut avoir lieu en raison de la présence du terme A^2 . En circuit-QED en revanche, la modélisation des circuits ne fait pas appel au même type d'Hamiltonien qui n'ont pas à être invariants de jauge, par conséquent il n'y a a priori pas de "No-go theorem" [103] pour les transitions de phase superradiantes dans les dispositifs de circuit-QED.

La thématique des transitions de phase quantiques dans les systèmes de cavity- et circuit-QED sera le sujet centrale de cette thèse que nous débiterons dans le chapitre 1 en présentant ces deux disciplines ainsi que le régime de couplage ultrafort. Nous essayerons de montrer comment l'atteindre et pour quelle raison les circuits supraconducteurs semblent particulièrement bien adaptés à cet égard. Nous nous intéresserons dans le chapitre 2 à la transition de phase dite "superradiante" prédite dans le cadre du modèle de Dicke décrivant l'interaction d'un champ électromagnétique avec un ensemble d'atomes (réels ou artificiels) placés dans une cavité (ou une ligne de transmission) en en rappelant les principales caractéristiques. Les chapitres 3 et 4 constituent l'essentiel des résultats originaux de cette thèse. Dans le chapitre 3 nous montrerons que le "No-go theorem" pour les transitions de phase superradiantes en cavity-QED, qui repose sur de nombreuses hypothèses, est moins universel qu'on ne pourrait le penser. En effet, ce théorème repose, entre autres choses, sur une approximation de systèmes à 2 niveaux pour les atomes. Nous montrerons qu'en considérant l'ordre suivant d'approximation (approximation de systèmes à 3 niveaux pour les atomes), ce théorème n'est plus valable et il est possible

d'observer une transition de phase superradiante du premier ordre cette fois-ci. Dans le chapitre 4, nous montrerons qu'il est possible, à l'aide d'un choix judicieux de circuit supraconducteur, d'obtenir un modèle de Dicke ayant soit une symétrie discrète, soit une symétrie continue ($U(1)$), mieux connu sous le nom de modèle de Tavis-Cummings, et ce même en régime de couplage ultrafort. Nous montrerons également qu'en limite thermodynamique ($N_{at} \rightarrow \infty$), un mode de Goldstone apparaît au sein du spectre des excitations de ce modèle comme conséquence de la brisure d'une symétrie continue. Nous montrerons également que ce modèle donne lieu à un diagramme de phase composé de quatre phases différentes.

Chapitre 1

Electrodynamique Quantique.

Nous allons dans ce chapitre présenter deux disciplines cousines : l'Electrodynamique quantique en cavité (Cavity-QED) et l'Electrodynamique quantique des circuits (circuit-QED). Ces disciplines s'intéressent toutes deux à l'interaction lumière-matière : à l'échelle atomique dans le cas de la Cavity-QED et à l'échelle mesoscopique dans le cas de la circuit-QED. Nous introduirons le vocabulaire, les modèles, ainsi que les quantités auxquelles nous nous intéresserons tout au long des chapitres suivants.

1.1 Electrodynamique Quantique en cavité (cavity-QED)

1.1.1 Modélisation de l'interaction lumière-matière : l'Hamiltonien de Jaynes-Cummings

Dérivation de l'Hamiltonien du modèle de Jaynes-Cummings

L'Electrodynamique quantique en cavité (cavity-QED) est une discipline qui s'intéresse à l'interaction cohérente d'un champ électromagnétique quantifié et d'atomes au sein d'une cavité composée de deux miroirs réfléchissants (cf. fig 1.1). Le modèle utilisé pour décrire ce type de système est un Hamiltonien de couplage standard minimal [37] :

$$\mathcal{H}_{quant} = \sum_{i=1}^{N_{at}} \left\{ \sum_{j=1}^{N_{el}} \frac{(\hat{\mathbf{p}}_{i_j} - q_{i_j} \hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{r}}_{i_j}))^2}{2m_{i_j}} + V(\hat{\mathbf{r}}_{i_1}, \dots, \hat{\mathbf{r}}_{i_{N_{el}}}) \right\} + \sum_i \hbar \omega_i (a_i^\dagger a_i + 1/2). \quad (1.1)$$

Cet Hamiltonien décrit l'interaction d'un ensemble de particules chargées, de charge

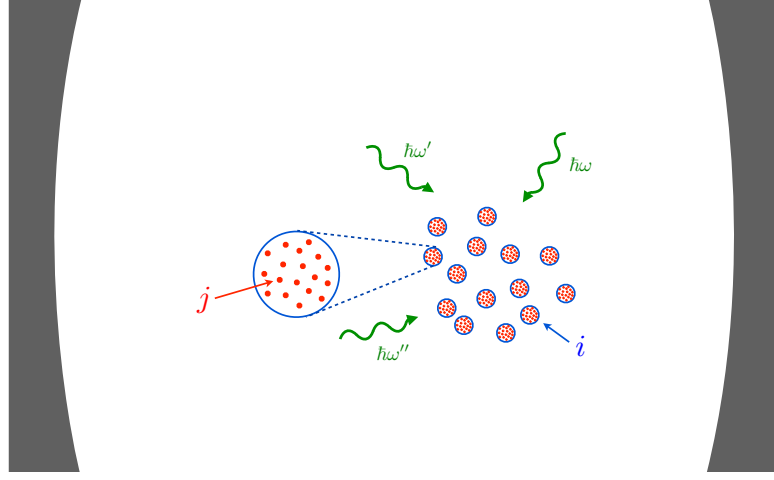


FIGURE 1.1 – Ensemble d'atomes (particules chargées) interagissant avec des modes quantifiés du champ de cavité. Les atomes sont repérés par l'indice i , les particules au sein de l'atome par l'indice j .

q_{ij} et de masse m_{ij} (formant des atomes) dont la quantité de mouvement et la position sont respectivement notées $\hat{\mathbf{p}}_{ij}$ et $\hat{\mathbf{r}}_{ij}$ avec un champ électromagnétique quantifié (en négligeant les degrés de liberté internes tels que le spin ou le moment orbital) décrit par le potentiel vecteur :

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \sum_l \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega_l V}} f_l(\mathbf{r}) \left[\hat{a}_l + \hat{a}_l^\dagger \right] \boldsymbol{\varepsilon}_l, \quad (1.2)$$

avec $f_l(\mathbf{r})$, la fonction enveloppe du mode de cavité l , de fréquence ω_l et $\boldsymbol{\varepsilon}_l$ un vecteur unitaire donnant la direction du potentiel vecteur. La parenthèse $(\hat{\mathbf{p}}_{ij} - q_{ij}\hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{r}}_{ij}))^2$ une fois développée, nous permet de distinguer trois termes au sein de l'Hamiltonien en jauge de Coulomb ($\nabla \cdot \hat{\mathbf{A}} = 0$) :

$$\mathcal{H}_{quant} = \mathcal{H}_{at} + \mathcal{H}_{int} + \mathcal{H}_{lum}, \quad (1.3)$$

qui représentent la partie matière seule (\mathcal{H}_{at}), la partie lumière seule (\mathcal{H}_{lum}) et l'interac-

tion lumière-matière (\mathcal{H}_{int}) et dont les expressions sont les suivantes :

$$\mathcal{H}_{at} = \sum_{i=1}^{N_{at}} \left\{ \sum_{j=1}^{N_{el}} \frac{\hat{\mathbf{p}}_{ij}^2}{2m_{ij}} + V(\hat{\mathbf{r}}_{i1}, \dots, \hat{\mathbf{r}}_{iN_{el}}) \right\} \quad (1.4)$$

$$\mathcal{H}_{int} = - \sum_{i=1}^{N_{at}} \sum_{j=1}^{N_{el}} q_{ij} \frac{\hat{\mathbf{p}}_{ij} \cdot \hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{r}}_{ij})}{m_{ij}}$$

$$\mathcal{H}_{lum} = \sum_{i=1}^{N_{at}} \sum_{j=1}^{N_{el}} q_{ij}^2 \frac{\hat{\mathbf{A}}^2(\hat{\mathbf{r}}_{ij})}{m_{ij}} + \sum_i \hbar \omega_i (a_i^\dagger a_i + 1/2). \quad (1.5)$$

Dans la majorité des expériences de cavity-QED, l'amplitude du champ électromagnétique est suffisamment faible pour pouvoir négliger le terme $\hat{\mathbf{A}}^2$ au sein de l'Hamiltonien \mathcal{H}_{lum} dont l'effet ne sera appréciable que pour un champ électromagnétique de forte amplitude [69]. En général, la cavité dans laquelle sont placés les atomes est choisie de telle manière à ce qu'un des modes propres soit en résonance avec la fréquence de transition atomique utilisée dans les expériences. Dans ce cas, il est possible de projeter l'Hamiltonien du système totale dans la base des deux niveaux à résonance avec la cavité et de négliger tous les autres modes de cavité non résonnants. En faisant cela, nous aboutissons à l'Hamiltonien de Rabi [69] :

$$\mathcal{H}_{Rabi}/\hbar = \omega_{cav} a^\dagger a + \frac{\omega_0}{2} \sigma_z + g(\mathbf{r})(\sigma_+ + \sigma_-)(a + a^\dagger). \quad (1.6)$$

avec ω_{cav} la fréquence du mode de cavité, ω_0 la fréquence de transition atomique et $g(\mathbf{r})$ l'amplitude de l'interaction lumière matière à la position moyenne de l'atome (cela est obtenu en supposant que la taille d'un atome a est bien plus faible que la longueur d'onde du mode de cavité λ : $a \ll \lambda$). Il est possible de montrer que [97] :

$$g(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{d_{eg}^2 \omega_{cav}}{2\hbar \epsilon_0 V}} U(\mathbf{r}), \quad (1.7)$$

avec d_{eg} le dipôle électrique de la transition atomique, V le volume du mode de cavité, et $U(\mathbf{r}) \propto f_l(\mathbf{r})$ l'enveloppe du mode de cavité (normalisé de manière à ce que $\int U(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = 1$). Nous remarquons donc que plus le volume de la cavité est faible, plus l'interaction lumière-matière sera importante. Nous remarquons également que plus le dipôle électrique de la transition est important plus le couplage lumière-matière g est important. Regardons de plus près l'Hamiltonien de Rabi, notamment le terme d'interaction lumière-matière

$g(\mathbf{r})(\sigma_+ + \sigma_-)(a + a^\dagger)$: ce terme décrit l'échange d'excitations entre la cavité et l'atome par l'annihilation d'un photon dans la cavité qui place l'atome dans son état excité ainsi que le processus inverse. Il y a également des termes dits anti-résonnants qui créent ou annihilent simultanément un photon et une excitation atomique, ces termes sont d'ordre supérieur et peuvent être négligés dans les régimes typiques de cavity-QED ($g \ll \omega, \omega_0$), nous développerons ce point plus en détail ultérieurement en mettant en évidence l'effet des termes anti-résonnants. Nous obtenons alors l'Hamiltonien de Jaynes-Cummings :

$$\mathcal{H}_{JC}/\hbar = \omega_{cav}a^\dagger a + \frac{\omega_0}{2}\sigma_z + g(\mathbf{r})(\sigma_+a + \sigma_-a^\dagger). \quad (1.8)$$

qui a été très utilisé pour modéliser les expériences de cavity-QED. Cet Hamiltonien a rencontré un franc succès au cours de ces dernières années, car même si il est le fruit de nombreuses approximations, il décrit de manière très précise la plupart des expériences de cavity-QED.

Diagonalisation de l'Hamiltonien de Jaynes-Cummings.

En raison de l'absence des termes anti-résonnants cet Hamiltonien est diagonal par blocs et il est possible de le diagonaliser exactement dans la base $\{|n, \downarrow\rangle, |n-1, \uparrow\rangle\}$:

$$h_{J-C}^{(n)} = \begin{pmatrix} \omega n - \omega_0/2 & g\sqrt{n} \\ g\sqrt{n} & \omega(n-1) + \omega_0/2 \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

les énergies associées sont :

$$E_{\pm}^{(n)} = \omega(n-1/2) \pm \sqrt{(\omega - \omega_0)^2/4 + g^2n} \quad (1.10)$$

et les vecteurs propres associés peuvent se mettre sous la forme :

$$|n, +\rangle = \cos \theta_n |n, \downarrow\rangle + \sin \theta_n |n-1, \uparrow\rangle \quad (1.11)$$

$$|n, -\rangle = -\sin \theta_n |n, \downarrow\rangle + \cos \theta_n |n-1, \uparrow\rangle \quad (1.12)$$

avec $\tan \theta_n = 2g\sqrt{n}/(\omega - \omega_0 + \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + 4g^2n})$. Il est important de remarquer que les états propres de l'Hamiltonien de Jaynes-Cummings à couplage non nul, ne sont pas de simples produits tensoriels entre d'un côté la matière et de l'autre la lumière mais bien des états dans lesquels lumière et matière se trouvent intriqués et ne peuvent plus être vues comme deux entités différentes. Les nouveaux états propres du système sont

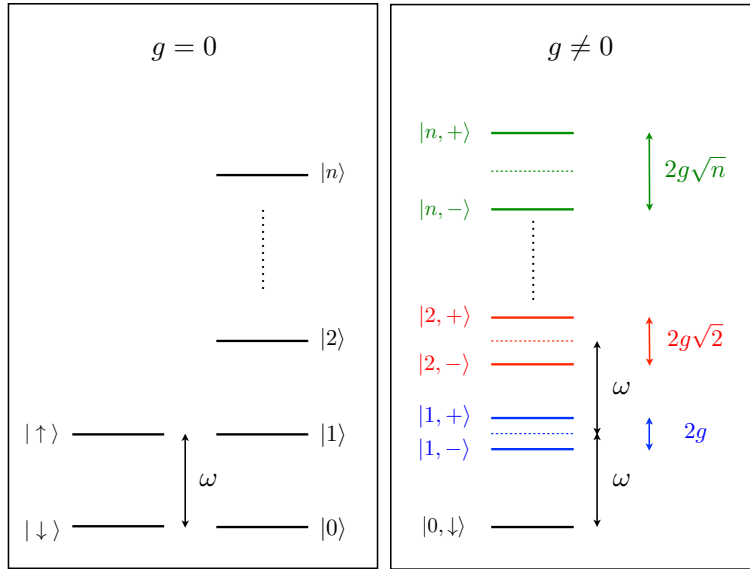


FIGURE 1.2 – Spectre de l'Hamiltonien de Jaynes-Cummings à résonance ($\omega = \omega_0$). À couplage nul (à gauche), les photons et les atomes sont bien distincts. À couplage non nul (à droite) les atomes et les photons s'intriquent pour former des états hybrides qui sont des superposition de lumière et de matière. L'anharmonicité du système à deux niveaux se manifeste par la non harmonicité du spectre de Jaynes-Cummings.

donc à la fois des excitations photoniques et atomiques (cf. fig. 1.2).

Couplage à l'environnement : régime de couplage fort.

Nous avons jusqu'à présent considéré que le système atome(s)+cavité était un système isolé. Cependant pour décrire les expériences réelles, il faut tenir compte du couplage du système à l'environnement. Ce couplage aura pour effet de conférer une certaine largeur aux niveaux d'énergie atomique (appelée γ), due à l'émission spontanée qui résulte du couplage de l'atome aux fluctuations électromagnétique du vide, le temps $1/\gamma$ peut être vu comme la durée de vie d'une excitation atomique. Les niveaux énergétiques de la cavité seront également élargis (élargissement noté κ) en raison de la possibilité pour les photons de s'échapper à travers les miroirs qui ne sont pas parfaits, le temps de vie d'un photon au sein de la cavité sera alors de $1/\kappa$. Ces quantités sont rappelées sur la figure 1.3.

Ainsi, afin de pouvoir observer des phénomènes intéressants, notamment l'interaction cohérente de la lumière et de la matière, il faut que les temps de vie des excitations ato-

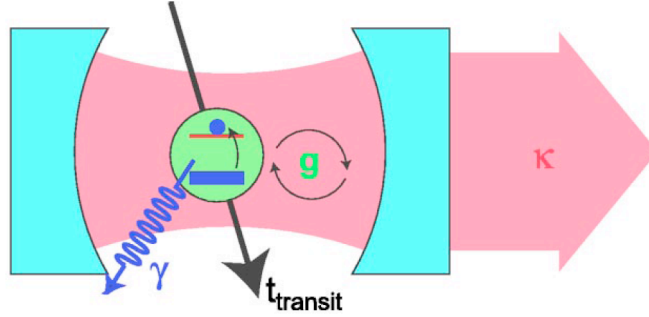


FIGURE 1.3 – Schéma modèle pour les expériences de cavity-QED : un système à deux niveaux couplé à un champ photonique. Du fait du couplage à l'environnement, les excitations atomiques et photoniques ont un temps de vie fini (respectivement $1/\gamma$ et $1/\kappa$). Les échanges d'énergie entre la cavité et l'atome se font sur une échelle de temps $1/g$. De plus, les atomes restent au sein de la cavité durant un temps $t_{transit}$ (Figure extraite de [19]).

miques et photoniques soient suffisamment importants comparé au temps caractéristique d'échange d'énergie entre les atomes et la cavité, ce qui se résume de la manière suivante :

$$\frac{g^2}{\kappa\gamma} \gg 1. \quad (1.13)$$

Ce régime est appelé "régime de couplage fort" et est celui dans lequel se placent la plupart des expériences de cavity-QED (Caltech [97], LKB [113],...). Il est important de noter que dans ce genre de système, atteindre le régime de couplage fort n'est pas chose aisée, les quantités sur lesquelles les expérimentateurs peuvent influencer n'étant pas nombreuses. Elles se résument à κ en ayant des miroirs les plus proches possible de la perfection (coefficient de réflectivité élevé), g en utilisant des atomes de Rydberg se trouvant dans des orbitales de rayon L très élevé ce qui leur confère un dipôle $d_{eg} \propto eL$ de valeur élevée (stratégie utilisée dans le groupe de Serge Haroche [69]) ou en choisissant des cavités de volume V_M faible (pas trop cependant car plus V_M est faible et plus κ est élevé). La valeur de γ quant à elle, est une propriété imposée par les atomes utilisés et la géométrie de la cavité. Les valeurs typiques de ces paramètres sont [113] : $(g/\omega_0, 1/\kappa, 1/\gamma, \omega_0) = (1 \times 10^{-7}, 1 \text{ ms}, 30 \text{ ms}, 50 \text{ GHz})$ au LKB par exemple. Ce régime de couplage est extrêmement intéressant car il permet d'explorer les propriétés d'interaction entre la lumière et la matière à l'échelle la plus fondamentale : celle du photon et de l'excitation atomique uniques. Le régime de couplage fort permet par exemple d'observer

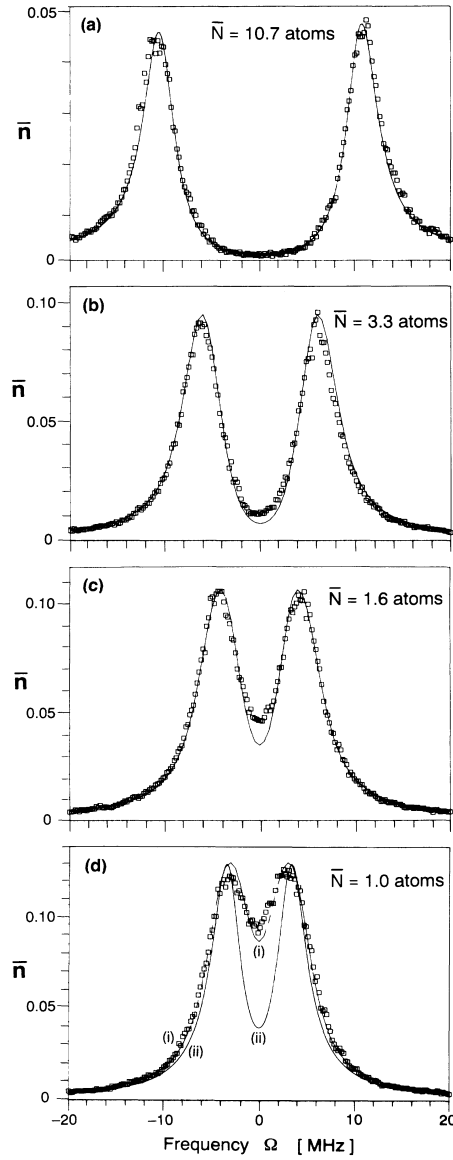


FIGURE 1.4 – Spectroscopie du premier doublet Jaynes-Cummings (correspondant aux états $|1, -\rangle$ et $|1, +\rangle$) pour différentes valeurs du nombre moyen d’atomes au sein de la cavité optique (\bar{N}). Nous voyons bien apparaître les premier doublet Jaynes-Cummings, de plus, plus le nombre moyen d’atomes est important, plus l’écart entre les états du doublet est important : les modes propres deviennent collectifs. Nous reviendrons sur cette propriété plus tard. (Figure extraite de [128]).

l’anharmonicité du spectre du modèle de Jaynes-Cummings [128] (cf. fig 1.4). Il permet également d’observer les oscillations de Rabi (échange cohérent d’excitations entre le

champ électromagnétique et la cavité) qui sont obtenues en envoyant un atome dans un état excité $|\uparrow\rangle$ au sein de la cavité qui possédera un certain nombre de photons en son sein ($|n\rangle$). Cet état n'étant pas état propre de l'Hamiltonien de Jaynes-Cummings, il va évoluer au cours du temps de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 |\psi(t)\rangle &= \exp(-i\mathcal{H}_{JC}t/\hbar) |n, \uparrow\rangle \\
 &= \exp(-i\mathcal{H}_{JC}t/\hbar) (|n+1, +\rangle + |n+1, -\rangle) / \sqrt{2} \\
 &= \exp(i\omega_0 t) \left(\cos(g\sqrt{n+1}t) |n, \uparrow\rangle + i \sin(g\sqrt{n+1}t) |n+1, \downarrow\rangle \right) \quad (1.14)
 \end{aligned}$$

Il y aura donc un échange cohérent de photons entre la cavité et l'atome à une fréquence $g\sqrt{n}$ qui va dépendre du nombre de photons dans la cavité au départ. Cette expérience a été réalisé au LKB par exemple [30] et a permis de mesurer l'état du champ au sein de la cavité en se servant de ce phénomène d'oscillations de Rabi, qui permettent d'identifier les états de fock $|n\rangle$ qui composent l'état du champ au sein de la cavité car la fréquence des oscillations de Rabi en dépend (cf. fig. 1.5). Cette expérience constitue une preuve expérimentale de la quantification du champ électromagnétique au sein de la cavité. Il est également possible dans ce régime d'observer en temps réel le phénomène de décohérence quantique [29] (disparition du caractère quantique d'un système, en raison de l'interaction avec son environnement) et bien d'autres choses encore [97, 113] qui seraient hors de propos dans le cadre de cette thèse.

1.2 Electrodynamique des circuits (circuit-QED)

L'électrodynamique des circuits (circuit-QED) s'intéresse quant à elle à l'étude et au contrôle de degrés de liberté macroscopiques (i.e. la somme de nombreuses contributions microscopiques) que sont les courants et les tensions au sein d'un circuit électrique composé d'éléments supraconducteurs. Il existe une forte analogie entre ces systèmes et les systèmes de cavity-QED plus traditionnels tels que ceux vus précédemment. Cependant, une des différences majeures est que les interactions n'ont pas lieu entre des photons et de "vrais" atomes mais plutôt entre des photons et des atomes "artificiels" dont il est possible de contrôler les propriétés. De plus, de par la géométrie de ces circuits, l'équivalent de la cavité optique, la ligne de transmission, est de manière effective unidimensionnelle et possède donc un volume bien plus faible que les cavités optique, ce qui va permet d'atteindre des régimes de couplage bien plus importants qu'avec les

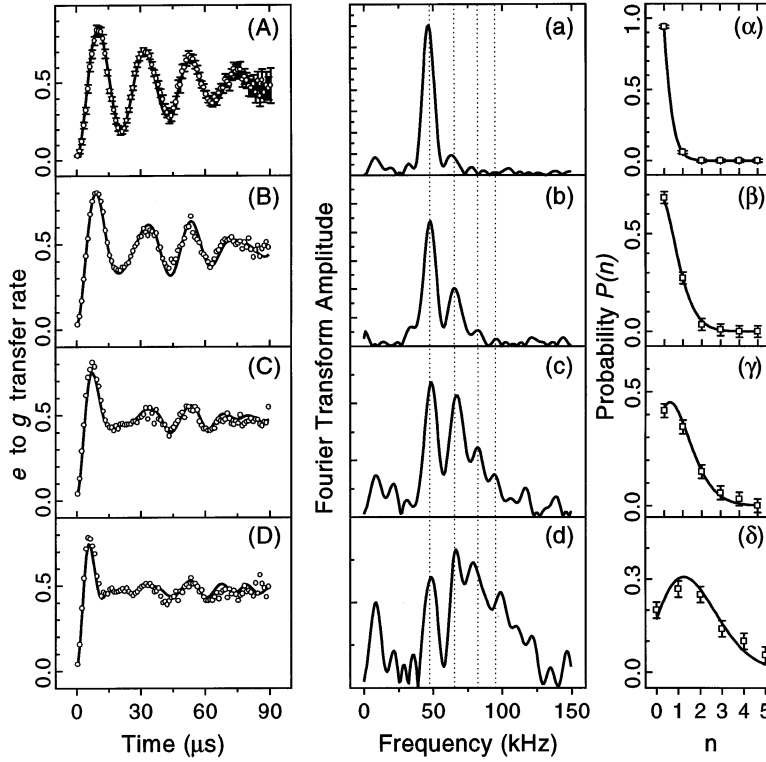


FIGURE 1.5 – Oscillations de Rabi (figures de gauche), transformée de Fourier des oscillations (figures du milieu), état du champ reconstruit à partir des oscillations (figures de droite), pour une cavité vide (première ligne) et pour des champs cohérents d’amplitude croissante au sein de la cavité (lignes suivantes). (Figure extraite de [30])

systèmes de cavity-QED. Cependant, cette grande flexibilité des circuits a un prix : deux atomes de n’importe quelle espèce (C,N,O,Ag,...) seront toujours parfaitement identiques, tandis que deux atomes artificiels (circuits) produits selon le même procédé auront des propriétés différentes. En effet, les processus de fabrication de ces atomes n’étant jamais d’une précision infinie (aussi bonne soit elle), il y a toujours des variations entre les paramètres escomptés et les paramètres réels. Ces systèmes étant d’un abord moins facile que les systèmes de cavity-QED puisque très flexibles quant à leurs paramètres, nous allons expliquer comment les décrire et quels sont les régimes qui nous intéresseront dans la suite. Les éléments développés dans cette partie sont essentiellement basés sur un cours donné par M. Devoret, A. Wallraff et J. Martinis à l’école d’été des Houches en 2004 [55, 45], un article de revue de R. Schoelkopf et S. Girvin [122] ainsi les cours donnés par M. Devoret au Collège de France [41] et par S. Girvin à l’école d’été des

Houches en 2011 [43] auxquels j'ai eu la chance d'assister durant ma thèse.

1.2.1 Qu'est ce qu'un circuit quantique ?

Les circuits quantiques sont, en partie, nés d'une question fondamentale posée par Anthony Leggett dans les années 80 [90] : Peut-il exister un objet de taille macroscopique (i.e. composé d'un nombre très importants d'atomes $\approx 10^{23}$) se comportant de manière quantique ? Cette question n'est pas du tout anodine, en effet si la matière à très petite échelle (microscopique) est régie par les lois de la mécanique quantique, à grande échelle (macroscopique) en revanche elle est gouvernée par les lois de la mécanique classique. Il paraît alors naturel d'explorer les échelles intermédiaires (mesoscopiques), pour essayer de comprendre plus précisément le mécanisme de disparition du comportement quantique qui laisse place au comportement classique. Ce mécanisme qui porte le nom de décohérence (i.e. la perte de cohérence quantique interdisant l'existence de superpositions d'états) est un sujet de recherche encore très actif actuellement pour lequel les réponses ne sont que partielles pour l'instant. Cependant, la question d'Anthony Leggett a reçu une réponse positive au début des années 80 [95, 44, 35] durant lesquelles il a été prouvé que le courant traversant une jonction Josephson (dispositif présenté plus bas) pouvaient présenter un caractère à la fois purement quantique (quantification des niveaux d'énergie au sein de la jonction) tout en étant mesoscopique (grand nombre de particules microscopiques participants à ce courant). Suite à ces expériences, il a été démontré à la fin des années 90 [101] que la charge, au sein d'un dispositif de boîte à paires de Cooper (dispositif présenté plus bas) de taille millimétrique, pouvait elle également présenter un caractère quantique et qu'il était possible de placer ce système en une superposition quantique d'états de charge au sein du dispositif. Ainsi, un circuit quantique est un circuit électrique décrit par un ensemble de variables collectives (courants, tensions) qui se comportent de manière purement quantique.

Maintenant que nous savons ce qu'est un circuit quantique, nous pouvons nous intéresser brièvement à sa fabrication ainsi qu'à ses propriétés. En effet, bien que nous n'ayons pas de description tout à fait satisfaisante du mécanisme de décohérence, nous savons que celui-ci est l'ennemi de la superposition quantique d'états. Ainsi, il faut limiter la décohérence au sein du circuit pour observer son comportement quantique. La décohérence s'accompagne bien souvent (mais pas uniquement) de dissipation. Or, dans un circuit la dissipation est surtout due à la résistance propre des composants (effet Joule). C'est pourquoi, les matériaux supraconducteurs tels que le Niobium ou l'Aluminium, qui possèdent une

résistance nulle en phase supraconductrice, sont de parfaits candidats pour la réalisation de circuits quantiques. Cependant, l'état supraconducteur ne peut exister qu'en deçà d'une certaine température (dite température critique). De plus, les variables quantiques décrivant ces circuits étant des charges et des courants, le bruit électromagnétique de l'environnement direct des circuits peut également être une cause de décohérence et doit par conséquent être minimisé autant que possible. Ces deux contraintes imposent donc de placer les circuits quantiques au sein d'une cage de Faraday (afin de limiter les bruits électromagnétique) elle-même placée au sein d'un cryostat (afin de permettre l'existence de la phase supraconductrice).

A quelle température et dans quel régime de fréquence ces circuits peuvent-ils alors être utilisés ? La condition d'existence de la phase supraconductrice fixe une borne haute pour la température de fonctionnement de ces circuits (la température critique du matériau). De plus, les fréquences ω des courants et tensions appliquées au circuit doivent être telles qu'il soit possible de s'affranchir du bruit thermique $\hbar\omega \gg k_b T$, mais pas trop élevée afin de préserver l'état supra $\hbar\omega \ll \Delta$ (éviter la brisure de paires de Cooper), avec Δ l'énergie de gap supraconducteur du matériau considéré. Ainsi nous voyons qu'idéalement, afin d'avoir une gamme de fréquence la plus large possible pour interagir avec les circuits, il faudrait que la température soit aussi proche que possible du zéro absolu. La technologie actuelle de cryostats à dilution permet d'atteindre des températures de l'ordre de 10 mK ce qui, conjugué à la contrainte du gap supraconducteur, impose une gamme de fréquence de 5 à 20GHz en fonction du matériau utilisé pour fabriquer les circuits.

1.2.2 Variables pertinentes pour la description des circuits.

Les circuits classiques sont habituellement décrit en terme de courants et de tensions, ainsi les variable pertinentes pour leur étude pourraient par exemple être la variable charge $q(t)$ (proportionnelle à une tension) et sa dérivée première $\dot{q}(t)$ (le courant). Ainsi le Lagrangien d'un circuit serait de la forme $\mathcal{L}(q, \dot{q})$, puis après avoir défini la variable conjuguée à la charge ($\phi = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}$), nous aurions un Hamiltonien de la forme $\mathcal{H}(\phi, q)$. Ou alors, de manière totalement symétrique nous aurions pu prendre comme variable pertinente la variable ϕ (appelée flux) et sa dérivée première $\dot{\phi}$ qui n'est autre que le potentiel électrique V (les deux variables étant reliées par $\hat{\Phi}(t) = \int dt' \hat{V}(t')$) et nous aurions alors eu un Hamiltonien de la forme $\mathcal{H}(q, \phi)$. Dans les deux cas, nous voyons que la charge et le flux sont toutes les deux les variables conjuguées pertinentes, cette

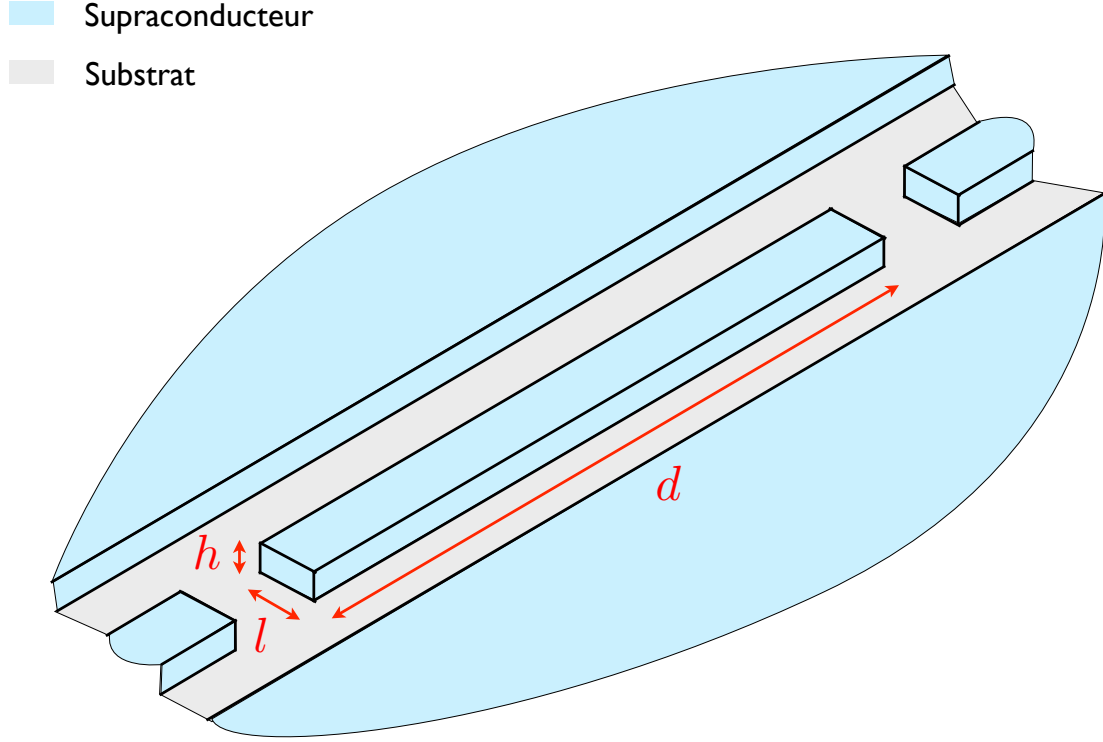


FIGURE 1.6 – Schéma d’une ligne de transmission coplanaire composés d’un pavé de supraconducteur de dimensions $d * l * h$ (avec $d \gg l, h$) interrompue en ses extrémités par deux condensateurs (équivalents des miroirs en cavity-QED) et entouré de conducteur de part et d’autre (qui représentent la masse). Cette ligne de transmission est l’équivalent unidimensionnel d’un câble coaxial.

démarche est totalement symétrique et mène au même Hamiltonien. Par conséquent, choisir le couple (q, \dot{q}) ou $(\phi, \dot{\phi})$ pour exprimer le Lagrangien est totalement arbitraire. Cependant, pour des raisons qui seront claires dans la suite, la partie de l’Hamiltonien dépendante de $\dot{\phi}$ sera toujours quadratique, tandis que la partie dépendante de ϕ ne le sera en général pas. Ainsi, le choix se porte plutôt vers le couple $(\phi, \dot{\phi})$, qui est celui que nous adopterons dans la suite de l’exposé.

1.2.3 Ligne de transmission coplanaire : la cavité Fabry-Pérot supraconductrice.

Le premier ingrédient essentiel pour pouvoir étudier des phénomènes analogues à ceux décrits plus haut dans le cadre de l’électrodynamique quantique en cavité est la

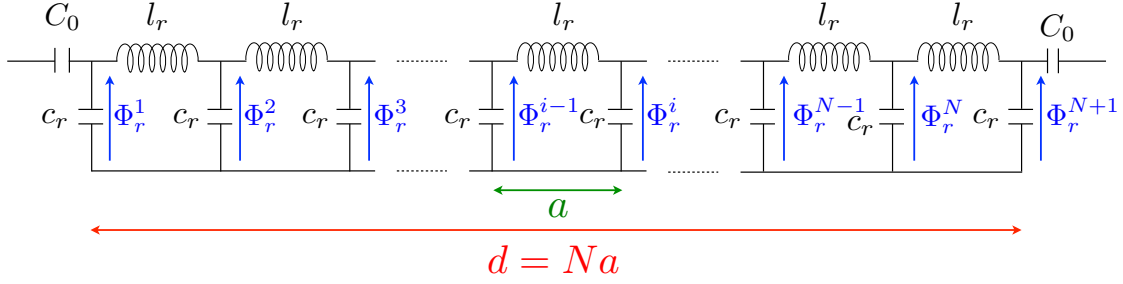


FIGURE 1.7 – Modèle de ligne de transmission "distribué". La ligne de transmission est modélisée par un ensemble de N circuits LC en série de capacité $c_r = C_r/N$ et d'inductance $l_r = L_r/N$.

cavité elle-même. Dans le domaine de l'électrodynamique des circuits, ces cavités sont des ligne de transmission coplanaires composées de trois pavés de supraconducteur (cf. fig 1.6) : deux pavés périphériques qui représentent la masse et un pavé central de dimension $d * l * h$ avec $d \gg l, h$ représentant la cavité supraconductrice (l'équivalent de la cavité Fabry-Pérot en cavity-QED). Le fait qu'une des dimensions de la cavité soit bien plus grande que les deux autres implique que, de manière effective la cavité peut être considérée comme unidimensionnelle ce qui va avoir des conséquences sur l'amplitude du couplage lumière-matière qui est d'autant plus grand que le volume de la cavité est petit (cf. eq. (1.7)). Pour décrire les excitations propres de la ligne de transmission supraconductrice, nous devons utiliser un modèle de ligne de transmission "distribué" (cf. fig 1.7) qui va permettre de rendre compte de la variation spatiale des modes (ce modèle doit être utilisé lorsque les courants et tensions au sein du circuits ont une longueur d'onde inférieure à la taille de celui-ci). L'inductance et la capacité totales de la ligne de transmission de longueur d est donc distribué sur N mailles élémentaires de taille a telles que $d = Na$. L'inductance par maille est donc $l_r = L_r/N = L_r a/d$, il en va de même pour la capacité par maille ($c_r = C_r/N = C_r a/d$). L'Hamiltonien de ce modèle peut donc se mettre sous la forme suivante :

$$\mathcal{L}_{TLR} = \sum_i \left(\frac{(\dot{\Phi}_r^i)^2}{2c_r} - \frac{(\hat{\Phi}_r^i - \hat{\Phi}_r^{(i-1)})^2}{2l_r} \right), \quad (1.15)$$

qui ne représente rien d'autre que la somme des énergies de charge et des énergies inductives contenues au sein de la ligne de transmission. En prenant une limite continue ($a \rightarrow 0$ à d fixé), il est possible de quantifier les modes d'excitation de la ligne de

transmission (avec comme conditions aux limites un courant nulle en $x = 0$ et $x = d$) [19] :

$$\begin{aligned}\hat{\Phi}_r(x) &= \sum_n \sqrt{\frac{\hbar Z}{n\pi}} \cos(k_n x) (\hat{a}_n + \hat{a}_n^\dagger) \\ \hat{Q}_r(x) &= -i \sum_n \sqrt{\frac{\hbar n \pi}{Z}} \cos(k_n x) (\hat{a}_n - \hat{a}_n^\dagger),\end{aligned}\tag{1.16}$$

avec $k_n = n\pi/d$ le nombre d'onde du mode n et $Z = \sqrt{L_r/C_r}$ l'impédance de la ligne de transmission. Nous voyons donc que l'équivalent du champ électrique dans le cas de la cavity-QED, est la charge (\hat{Q}) en circuit-QED et l'équivalent du champ magnétique est le flux ($\hat{\Phi}$). L'équivalent des photons étant des excitations simultanées de flux et de charge :

$$\hat{a}_n = \frac{2}{d} \int dx \cos(k_n x) \left(\sqrt{\frac{n\pi}{\hbar Z}} \hat{\Phi}_r(x) + i \sqrt{\frac{Z}{\hbar n \pi}} \hat{Q}_r(x) \right), \tag{1.17}$$

tout à fait équivalentes aux excitations du champ électromagnétique. Les premiers modes d'excitation ont été représentés sur la figure 1.8 et nous remarquons que pour le premier mode par exemple, le courant (qui est définie comme $\hat{I}_r(x) = (\partial_x \hat{\Phi}_r(x))/l_r$) est maximum au centre de la ligne de transmission, tandis que la charge est maximum à ses extrémités. Ces considérations seront importantes par la suite, lorsque nous devrons décider de l'endroit auquel placer les atomes artificiels que nous allons à présent décrire. Mais avant cela, pour pouvoir créer des atomes artificiels (i.e. des systèmes dont le spectre n'est pas harmonique), il nous faut un ingrédient supplémentaire qui soit à la fois non linéaire et non dissipatif, or le seul élément qui ait ces deux propriétés simultanément et possède un comportement quantique est la Jonction Josephson dont nous allons décrire le fonctionnement.

La jonction Josephson

Nous allons, pour décrire jonction Josephson, nous inspirer de la description phénoménologique introduite par Steven Girvin [43] durant un cours auquel j'ai eu la chance d'assister durant l'été 2011 à l'école de physique des Houches . Pour nous, la jonction Josephson sera simplement une barrière d'isolant séparant deux supraconducteurs dont les indices seront L (left) et R (right) (cf. fig 1.9). L'état global du système sera décrit par une fonction d'onde macroscopique $|N_L, N_R\rangle$ avec $N_{L(R)}$ le nombre de paires de Cooper

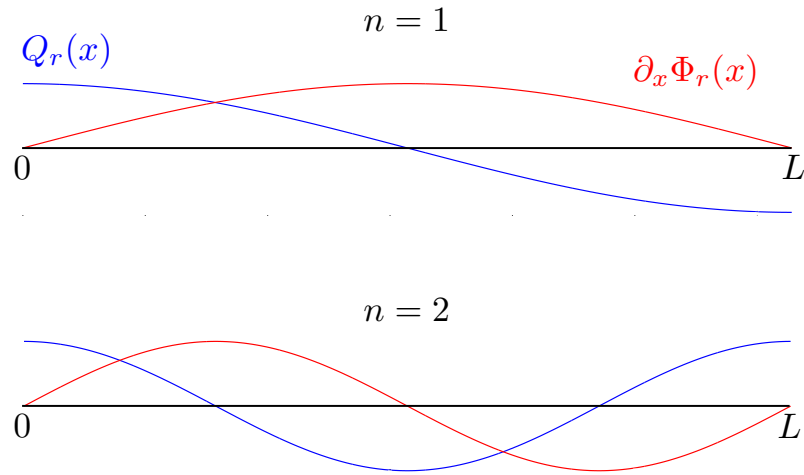


FIGURE 1.8 – Premier (figure du haut) et second (figure du bas) modes de courant (rouge) et de charge (bleu) au sein de la ligne de transmission.

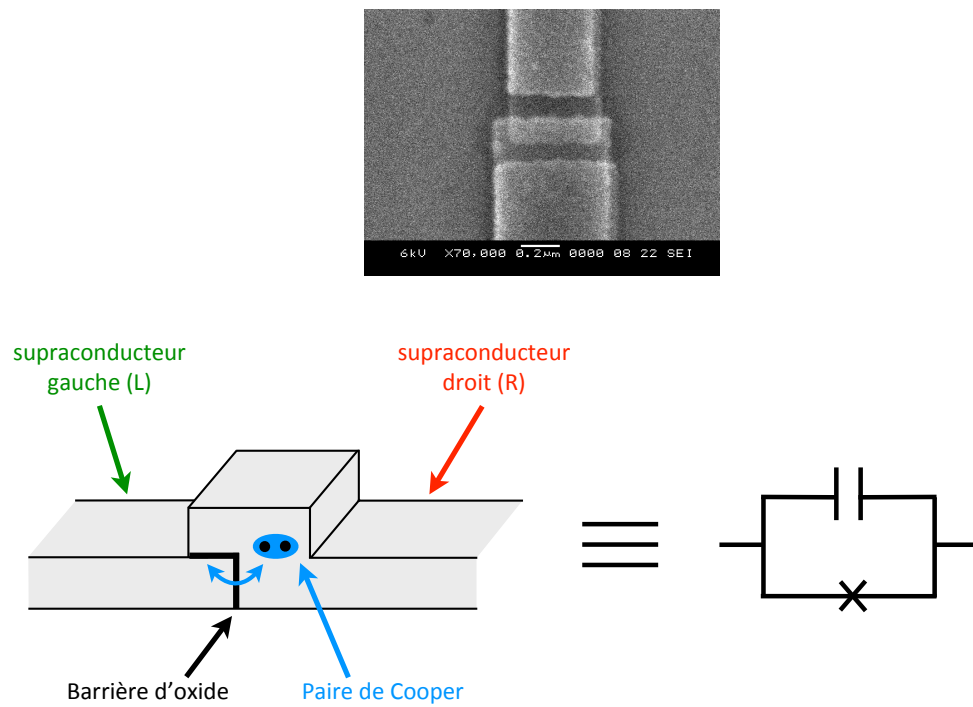


FIGURE 1.9 – Image en microscopie (en haut, image extraite de [111]), Schéma (en bas à gauche) et représentation schématique d'une jonction Josephson.

se trouvant au sein du supraconducteur $L(R)$. La jonction Josephson permet le passage

de paires de Cooper du supraconducteur L vers le supraconducteur R (et inversement) par nombre entier et l'état du système avec m charges en excès du côté R sera donc représenté par $|m\rangle = |N_L - m, N_R + m\rangle$. Nous voyons donc que nous pouvons définir l'état global du système par un seul état $|m\rangle$ qui représente les charges en excès sur l'île droite (ou en défaut sur l'île gauche) par rapport à un état de référence $|N_L, N_R\rangle$. D'un point de vue phénoménologique, la jonction Josephson peut par conséquent être décrite par l'Hamiltonien suivant :

$$H_T = -\frac{E_J}{2} \sum_m \left(|m+1\rangle \langle m| + |m\rangle \langle m+1| \right), \quad (1.18)$$

cet Hamiltonien décrit le passage par effet tunnel d'une paire de Cooper de L vers R ou de R vers L . Cependant, lorsqu'il se trouve des charges en excès au sein de l'un ou l'autre des supraconducteurs, ceux-ci n'étant plus neutres, il faut tenir compte de l'interaction de Coulomb entre les charges. C'est pour cela que la Jonction Josephson est modélisée par un élément tunnel pur en parallèle avec un condensateur (cf. fig 1.9).

Afin de nous rendre compte que ce modèle phénoménologique décrit bien la physique de la jonction, nous allons montrer que nous pouvons retrouver les deux équations de Josephson à partir des équations de Heisenberg associées à l'Hamiltonien (1.18). Pour cela, il convient tout d'abord de se rendre compte que l'Hamiltonien H_T est un Hamiltonien de type liaisons fortes à une dimension dont les états propres sont des ondes planes du type :

$$|\varphi\rangle = \sum_m e^{-im\varphi} |m\rangle, \quad (1.19)$$

qui n'est rien d'autre qu'un état de flux (un état délocalisé sur tous les états de charge). En effet, en appliquant, H_T à cette onde plane nous obtenons :

$$H_T |\varphi\rangle = -E_J \cos \varphi |\varphi\rangle. \quad (1.20)$$

Ce qui nous donne une expression totalement équivalente à (1.18) dans la base des états de flux :

$$H_T = -E_J \cos \hat{\varphi}. \quad (1.21)$$

Or, le courant traversant la jonction est proportionnel à la variation de la différence de charges entre les deux supraconducteurs au cours du temps ($\hat{I} = 2e(d\hat{n}/dt)$). Ceci, d'après les équations d'Heisenberg pour la charge, nous donne l'expression suivante pour l'opérateur courant :

$$\hat{I} = 2e(d\hat{n}/dt) = i\frac{2e}{\hbar} [H_T, \hat{n}] = i\frac{e}{\hbar} E_J \sum_m \left(|m+1\rangle \langle m| - |m\rangle \langle m+1| \right). \quad (1.22)$$

dont les ondes planes précédentes sont également fonctions propres :

$$\hat{I} |\varphi\rangle = I_c \sin \varphi |\varphi\rangle, \quad (1.23)$$

avec $I_c = 2\pi E_J / \phi_0$. Ainsi nous obtenons la première équation de Josephson :

$$I(\varphi) = I_c \sin \varphi \quad (1.24)$$

qui relie le courant qui passe à travers une jonction Josephson au sinus de la différence de phase entre les deux supraconducteurs. La représentation de l'Hamiltonien H_T dans la base des ondes planes sera donc $H_T = -E_J \cos \hat{\varphi}$. Cette équation est à l'origine de l'effet Josephson continu (DC Josephson effect) [77] qui nous dit qu'une différence de phase non nulle entre les deux supraconducteurs de part et d'autre de la barrière tunnel entraîne l'existence d'un courant de paires de Cooper à travers celle-ci.

Afin de trouver la seconde équation de Josephson, il convient d'appliquer une tension V aux bornes de la jonction, provoquant une différence d'énergie potentielle de charges entre les deux supraconducteurs $\hat{U} = -2eV\hat{n}$, rendant énergétiquement plus favorable l'excès de charges au sein d'un des supraconducteurs. L'Hamiltonien total sera alors $H = -E_J \cos \hat{\varphi} - 2eV\hat{n}$, ce qui nous donne pour la dynamique de la phase (en nous servant du commutateur $[\hat{\varphi}, \hat{n}] = i$, dont nous expliquerons l'origine plus tard) :

$$\frac{d\hat{\varphi}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [H_T, \hat{\varphi}] = \frac{2eV}{\hbar}, \quad (1.25)$$

qui est la seconde équation de Josephson. Cette équation est à l'origine de l'effet Josephson alternatif (AC Josephson effect) : Si nous appliquons une différence de potentiel aux bornes d'une jonction, l'équation (1.25) implique que la différence de phase entre les deux supraconducteurs va évoluer linéairement en fonction du temps ($\varphi(t) = 2eVt/\hbar$),

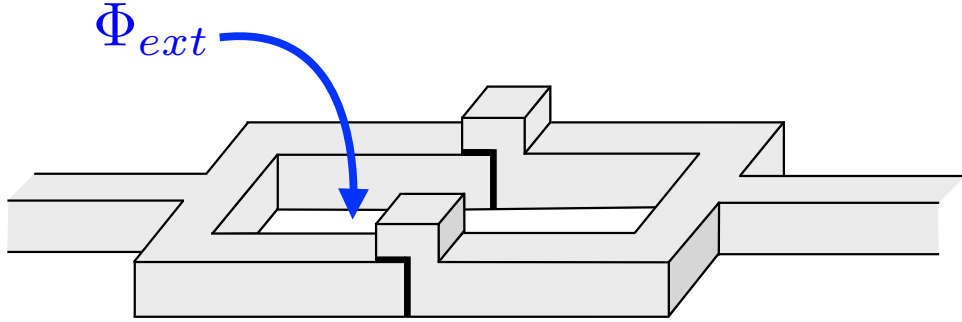


FIGURE 1.10 – Représentation schématique d'un SQUID (Superconducting QUantum Interference Device) composé de deux jonctions Josephson identiques au sein d'une même boucle. En appliquant un flux à cette boucle, il est possible de contrôler le courant critique du SQUID qui se comporte alors comme une Jonction Josephson à courant critique variable.

or l'équation (1.24) nous dit qu'une différence de phase implique un courant. Ainsi, en appliquant une tension aux bornes de la jonction, un courant alternatif de fréquence $2eV/\hbar$ va circuler à travers la jonction. Cet effet trouve de nombreuses applications notamment en métrologie [68] où il sert à maintenir sur des temps long une définition précise du Volt.

Ainsi, nous voyons bien que ce modèle phénoménologique de la jonction Josephson est tout à fait acceptable puisqu'il permet de retrouver les deux équations de Josephson. De plus, nous voyons que la caractéristique énergétique d'un tel dispositif ($\hat{H} = -E_J \cos \hat{\varphi}$) est fortement non linéaire en terme de la variable $\hat{\varphi}$ et va permettre de créer des "atomes artificiels" ayants un spectre non harmonique (en physique atomique c'est le potentiel de Coulomb $\propto 1/r$ qui entraîne la non linéarité du spectre atomique).

Le squid

Il existe une variante de la jonction Josephson appelée "SQUID" (Superconducting QUantum Interference Device) qui consiste en deux jonction idéalement identiques placées au sein d'une boucle (cf. fig 1.10). Ce dispositif est très utilisé en circuit-QED car comme nous allons le montrer il se comporte de manière effective comme une jonction Josephson d'énergie contrôlable par l'intermédiaire d'un flux extérieur Φ_{ext} appliqué à la boucle. Par effet d'interférence, entre les deux chemins suivis par les paires de Cooper au sein de la

boucle, le courant critique va être modifié par la présence du flux de champ magnétique (le champ magnétique n'est présent qu'au sein de la boucle, il est nul partout ailleurs). ceci est une manifestation d'un phénomène très important en physique quantique : l'effet Bohm-Aharonov [1, 2]. En effet, nous savons que le courant traversant le dispositif formé des deux jonctions sera la somme des courants passant par la première et la seconde jonctions :

$$\hat{I} = I_c(\sin \hat{\varphi}_1 + \sin \hat{\varphi}_2) = I_c \sin \left(\frac{\hat{\varphi}_1 + \hat{\varphi}_2}{2} \right) \cos \left(\frac{\hat{\varphi}_2 - \hat{\varphi}_1}{2} \right). \quad (1.26)$$

Or, la présence du champ magnétique appliqué à la boucle implique un changement de phase différent pour les fonctions d'onde des paires de Cooper passant par la partie supérieure de la boucle (chemin 1) et celles passant par la partie inférieure (chemin 2) :

$$\Delta_1 = \hat{\varphi}_1 + (2e/\hbar) \int_{(1)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}. \quad (1.27)$$

$$\Delta_2 = \hat{\varphi}_2 + (2e/\hbar) \int_{(2)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}. \quad (1.28)$$

De plus, la fonction d'onde décrivant le système devant être périodique sur la boucle, la somme algébrique des déphasage après un nombre entier de tours devra être un multiple entier de 2π :

$$\begin{aligned} \Delta_1 - \Delta_2 &= \hat{\varphi}_1 - \hat{\varphi}_2 + (2e/\hbar) \left(\int_{(1)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} - \int_{(2)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \right) = \hat{\varphi}_1 - \hat{\varphi}_2 + (2e/\hbar) \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \hat{\varphi}_1 - \hat{\varphi}_2 + 2\pi\Phi_{ext}/\Phi_0 = 2m\pi, \end{aligned} \quad (1.29)$$

$m \in \mathbb{Z}$. Ainsi, le courant totale sera finalement :

$$\hat{I} = I_c \cos \left(\pi \frac{\Phi_{ext}}{\Phi_0} \right) \sin(\hat{\varphi}), \quad (1.30)$$

avec $\hat{\varphi} = (\hat{\varphi}_1 + \hat{\varphi}_2)/2$, et nous voyons qu'il y a interférence entre les courant passant par la partie supérieur de la boucle et celui passant par la partie inférieure ce qui permet de contrôler le courant traversant la jonction à l'aide du flux extérieur appliqué. Ainsi, le SQUID peut être vu comme une jonction Josephson à courant critique variable de

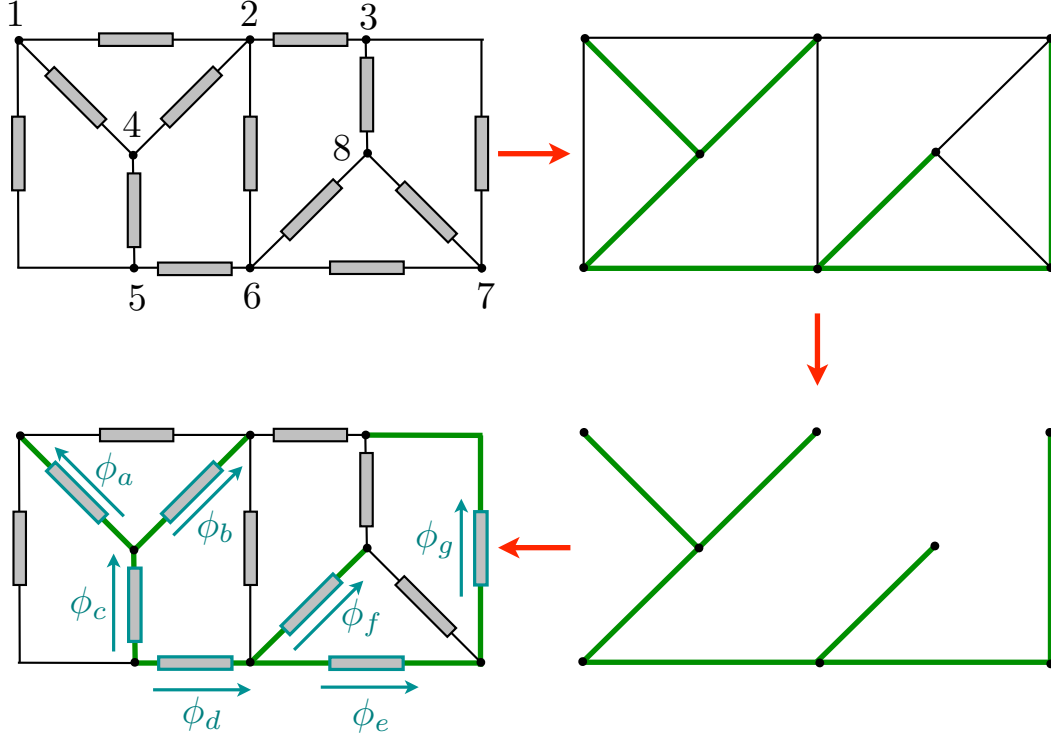


FIGURE 1.11 – Différentes étapes pour trouver le jeu minimal de variables indépendantes nécessaires pour décrire un circuit. Ici le circuit comporte 8 noeuds, il faudra donc $8-1 = 7$ variables indépendantes pour décrire le circuit. (figures copiées du cours de Michel Devoret au collège de France [41])

caractéristique énergétique :

$$\mathcal{H}_{\text{squid}} = -E_J \cos \left(\pi \frac{\Phi_{\text{ext}}}{\Phi_0} \right) \cos(\hat{\varphi}). \quad (1.31)$$

Détermination du jeu minimal de variables nécessaire pour décrire un circuit.

Nous avons choisi de décrire les Hamiltoniens des circuits en terme des variables ϕ et $\dot{\phi}$. Les circuits que nous allons considérer seront uniquement composé d'un ensemble de dipôles (cf. fig 1.11), c'est pourquoi la quantité intéressante pour décrire ces circuits sera la différence de flux (et non les valeurs absolues des flux). Ainsi, il est possible de représenter un circuit en terme de graphe comme celui de la figure 1.11, dans lequel les noeuds du graphe (au nombre de n) représenteront les fils qui composent le circuit et les branches du graphe (au nombre de b) représenteront les dipôles qui le composent. La

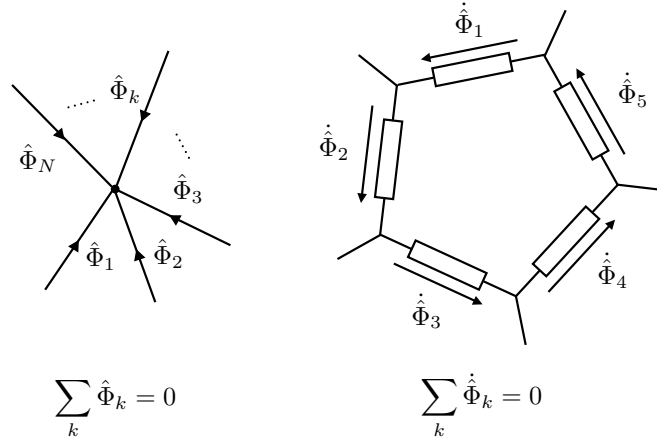


FIGURE 1.12 – Lois de Kirchhoff : la somme algébrique des courants arrivants à un noeud est nulle (à gauche) la somme algébrique des tensions au sein d'une boucle est nulle (à droite) pour les circuits électriques. Ces équations représentent les lois du mouvement associées au Lagrangien d'un circuit.

détermination du nombre de flux indépendants pour décrire le circuit sera alors réduit à la détermination de ce qu'on appelle "spanning tree", plus précisément cela revient à déterminer un sous graphe du graphe complet qui comporte un nombre minimal de branches pour relier tous les noeuds et ne comportant pas de boucles (cf. fig 1.11) : en effet, à chaque fois qu'il y a une boucle au sein du circuit la loi des mailles (loi de Kirchhoff pour les flux cf. fig 1.12) relie les flux au sein de la boucle (leur somme algébrique doit être nulle) qui ne sont donc pas indépendants. Bien sûr, un spanning-tree n'est pas unique (ce qui est relié à la non unicité de l'Hamiltonien décrivant un circuit donné). Et il est assez facile de voir que le nombre de branches qui vont composer le spanning-tree est égale à $n - 1$: en effet, pour relier n points sans qu'il n'y ait de boucle au sein du graphe, il faut $n - 1$ lignes (le nombre d'intervalles entre n points). Ce nombre n est justement égale au nombre de variables indépendantes qui décrivent le circuit.

Détermination du Lagrangien d'un circuit

Le Lagrangien d'un système mécanique est de la forme $\mathcal{L} = T(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) - V(q_1, \dots, q_n)$ avec T la somme des énergies cinétiques des particules qui composent le système mécanique et V la somme de leurs énergies potentielles [91]. Dans le cas des circuits, l'équivalent de l'énergie cinétique est l'énergie de charge (i.e. l'énergie stockée dans un condensateur), l'équivalent de l'énergie potentielle est la somme des énergie inductives (i.e. stockées dans

des bobines) et des énergies Josephson (i.e. stockées dans des jonctions Josephson). Par conséquent, le Lagrangien classique d'un circuit sera de la forme $\mathcal{L} = T(\dot{\phi}_1, \dots, \dot{\phi}_n) - V(\phi_1, \dots, \phi_n)$, les équations du mouvement associées à ce Lagrangien seront les lois de Kirchoff (cf. fig. 1.12).

Détermination de l'Hamiltonien quantique d'un circuit

Afin de déterminer l'Hamiltonien classique d'un système, il convient au préalable de déterminer la variable conjuguée à ϕ_k qui est la charge dont la définition est $Q_k = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\phi}_k$. Nous pourrions écrire le résultat sous la forme :

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_N \end{pmatrix} = \mathcal{C} \begin{pmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \vdots \\ \dot{\phi}_N \end{pmatrix}, \quad (1.32)$$

avec \mathcal{C} la matrice des capacités. Ensuite, il conviendra d'inverser cette matrice afin d'obtenir les expressions des $\dot{\phi}_k$ en fonction des Q_k qui une fois réinjectées dans la définition de l'Hamiltonien :

$$\mathcal{H} = \sum_k Q_k \dot{\phi}_k - \mathcal{L}, \quad (1.33)$$

nous donneront une fonction de la forme $\mathcal{H} = T(Q_1, \dots, Q_n) + V(\phi_1, \dots, \phi_n)$ avec $T(Q_1, \dots, Q_n)$ l'énergie de charge exprimée en fonction des Q_k (et non plus des $\dot{\phi}_k$). Il ne nous resta alors plus qu'à promouvoir les variables du circuits au rang d'opérateurs quantiques en appliquant le principe de correspondance à l'Hamiltonien classique en promouvant les variables Q_k et ϕ_k au rang d'opérateurs \hat{Q}_k et $\hat{\phi}_k$ qui posséderont les règles de commutation suivantes :

$$[\hat{\phi}_k, \hat{Q}_j] = i\hbar\{\phi_k, Q_j\} = i\hbar\delta_{kj}, \quad (1.34)$$

avec $\{f, g\}$ le crochet de Poisson des variables classiques f et g défini par :

$$\{f, g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial \phi_i} \frac{\partial g}{\partial Q_i} - \frac{\partial f}{\partial Q_i} \frac{\partial g}{\partial \phi_i} \right) \quad (1.35)$$

1.3 Les différents types d'atomes artificiels en Circuit-QED

Dans toute la suite de l'exposé, nous emploierons des opérateurs adimensionnés pour décrire les circuits. En effet, plutôt que d'utiliser la charge \hat{Q} et le flux $\hat{\phi}$, nous utiliserons le nombre de paires de Cooper $\hat{N} = \hat{Q}/2e$ et la phase des supraconducteurs $\hat{\varphi} = 2\pi\hat{\phi}/\phi_0$ avec $\Phi_0 = h/2e$ le quantum de flux. Le commutateur entre ces deux variables conjuguées est donnée d'après l'équation (1.34) par :

$$[\hat{\varphi}, \hat{N}] = i. \quad (1.36)$$

Dans cette partie, nous allons exposer les différents types d'atomes artificiels qu'il est possible de fabriquer à partir de bobines, de condensateurs et de jonctions Josephson ainsi que leurs propriétés.

1.3.1 La boîte à paires de Cooper (CPB).

La boîte à paires de Cooper ou "Cooper Pair Box" (CPB) (cf. fig. 1.13) a été pour la première fois réalisée expérimentalement par le groupe de Saclay [24], puis une année plus tard la première expérience démontrant la possibilité de créer une superposition cohérente d'états quantiques (états de charges) dans des circuits supraconducteurs a été réalisé au Japon [101]. Le modèle électrique de la CPB est en réalité assez simple et composé d'une jonction Josephson, d'un condensateur ainsi que d'un générateur de tension, le tout étant monté en série (cf. fig 1.13). Pourquoi ce montage porte-t-il ce nom ? Car comme nous pouvons le voir sur la figure 1.13, entre le condensateur et la jonction Josephson, il y a une île supraconductrice qui est séparé du reste du montage et qui constitue une "boîte" à Paires de Cooper (i.e. qu'il est possible de contraindre un nombre entier de paires de Cooper en excès sur cette île par rapport au reste du circuit en changeant le voltage appliqué). Afin de bien comprendre ce qu'il se passe, analysons l'Hamiltonien de la CPB (obtenu en appliquant la procédure de recherche d'Hamiltonien décrite plus haut) :

$$\mathcal{H}_{CPB} = E_c(\hat{N} - n_g)^2 - E_J \cos(\hat{\varphi}), \quad (1.37)$$

avec $E_c = 4e^2/(C_g + C_J)$. L'opérateur \hat{N} représente ici le nombre de paires de Cooper en excès sur l'île supraconductrice et $\hat{\varphi}$ la différence de phase entre les supraconducteurs se

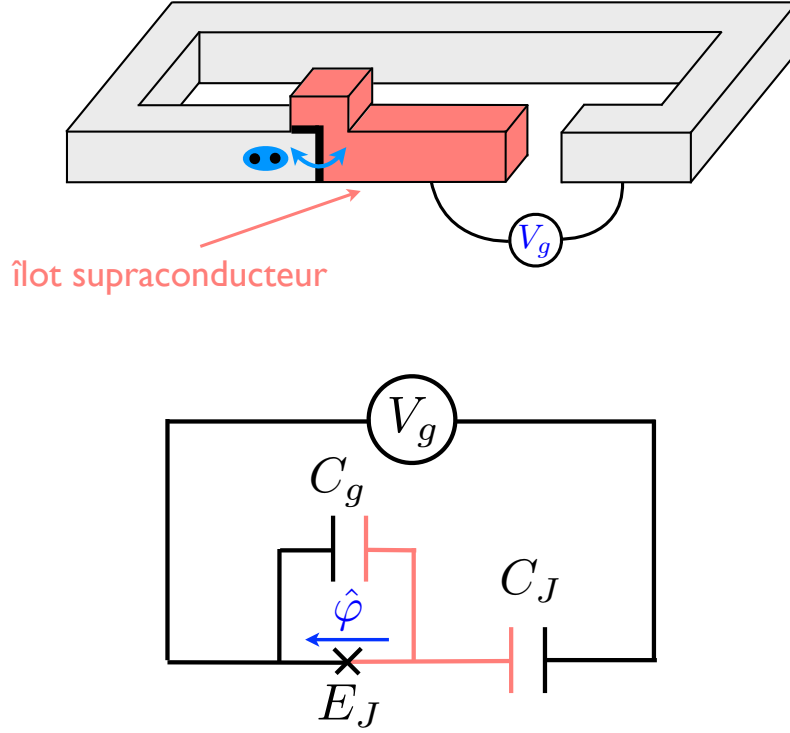


FIGURE 1.13 – Schéma et schéma électrique d'une boîte à paires de Cooper.

trouvants de part et d'autre de la jonction Josephson. Cet Hamiltonien dépend uniquement de deux paramètres : du rapport de l'énergie de charge et de l'énergie Josephson ainsi que du paramètre de contrôle $n_g = V_g/2e$. La CPB appartient à la catégorie des qubits de charge ce qui est lié à la variable qu'un opérateur extérieur peut utiliser pour la contrôler : la charge de gate n_g . L'Hamiltonien de la CPB est 2π périodique, en effet $\mathcal{H}_{CPB}(\hat{\varphi} + 2\pi) = \mathcal{H}_{CPB}(\hat{\varphi})$, ce qui signifie d'après le théorème de Bloch que les états propres de cet Hamiltonien doivent être état propres de l'opérateur rotation d'un angle 2π :

$$|\psi(\varphi + 2\pi)\rangle = e^{i\theta} |\psi(\varphi)\rangle, \quad (1.38)$$

$e^{i\theta}$ étant leur valeur propre ($\theta \in \mathbb{R}$). Une propriété intéressante découle de cette observation : une transformation unitaire du type

$$U = e^{ik\hat{\varphi}}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (1.39)$$

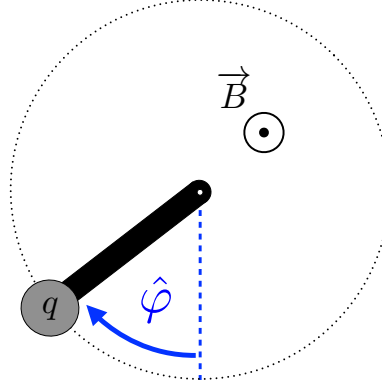


FIGURE 1.14 – La boîte à paires de Cooper peut être vue comme un rotor quantique chargé (dont le moment cinétique est quantifié et proportionnel à l'opérateur de charge \hat{N}), de masse m en interaction avec un champ magnétique appliqué (proportionnel à la charge de gate n_g), l'énergie potentielle de pesanteur ($mgl \cos \hat{\varphi}$) représente l'énergie de la jonction Josephson.

préserve la propriété (1.38), tout en ajoutant k charges en excès sur l'île supraconductrice, ce qui montre que le spectre de la CPB sera invariant par translation de la charge d'un nombre entier.

Analogie avec un rotor quantique.

La topologie particulière de la boîte à paires de Cooper en fait un objet très intéressant d'un point de vue quantique. Il existe en effet une forte analogie entre la CPB et un rotor quantique : l'énergie de charge peut être vue comme le moment d'inertie du rotor suivant l'axe z ($\hat{N} = -i\frac{\partial}{\partial \varphi}$) et l'énergie Josephson comme le moment créé par le poids du rotor (cf. fig 1.14). Pour expliquer la présence du paramètre de contrôle n_g il faut imaginer que le rotor possède une charge et qu'un solénoïde infini traverse la surface décrite par le mouvement du rotor. L'effet de ce solénoïde sera tout à fait analogue à l'effet Bohm-Aharonov [1, 2] et va donner lieu à la présence du terme n_g . En effet, la particule chargée interagit avec le champ électromagnétique créé par la bobine. Plus précisément, avec le potentiel vecteur via le couplage standard minimal ($\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - q\mathbf{A}(\mathbf{r})$). Nous considérerons que le rotor tourne autour de l'axe \mathbf{e}_z , ainsi le seul moment cinétique non nul sera :

$$\mathbf{L}_z = (\mathbf{r} \times \mathbf{p})_z \rightarrow (\mathbf{r} \times \mathbf{p})_z - q(\mathbf{r} \times \mathbf{A}(\mathbf{r}))_z. \quad (1.40)$$

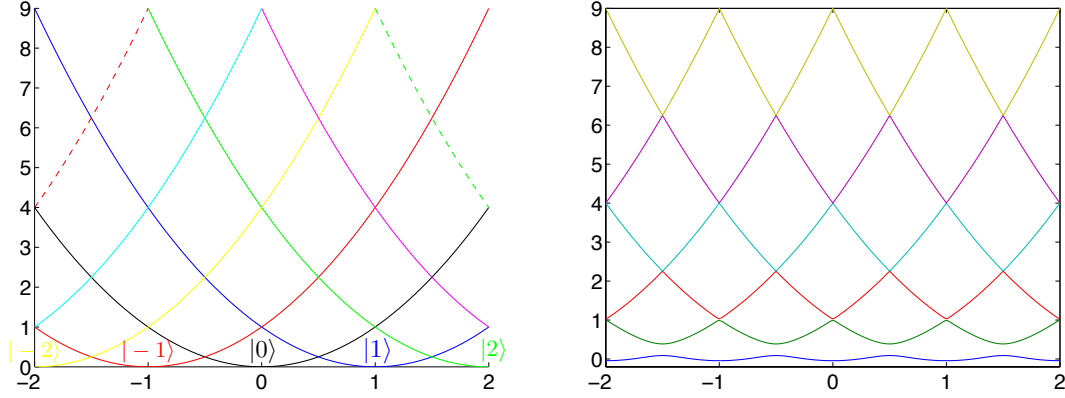


FIGURE 1.15 – Spectre de la boîte à paires de Cooper en fonction de la charge de gate n_g appliquée pour $E_J = 0$ (à gauche) et $E_J/E_C = 0.3$ (à droite).

Le champ magnétique créé par un solénoïde est nul en dehors de celui-ci. Cependant, le potentiel vecteur ne l'est pas et a pour expression :

$$\mathbf{A} = \frac{\Phi}{2\pi r} \mathbf{e}_\theta. \quad (1.41)$$

Ainsi le moment cinétique du rotor aura pour expression :

$$\mathbf{L}_z = \hbar \left(-i \frac{\partial}{\partial \hat{\varphi}} - \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \quad (1.42)$$

et finalement n_g représentera la fraction de quantum de flux Φ_0 qui traverse la surface décrite par le rotor. La périodicité de la fonction d'onde en fonction de n_g (cf. eq. (1.39)) sera simplement une manifestation de la périodicité de la fonction d'onde par rapport au flux Aharonov-Bohm.

Spectre et états propres : la boîte à paires de Cooper comme système à deux niveaux.

Regardons pour commencer comment varie le spectre de la CPB en fonction de n_g en ne tenant compte, pour commencer, que de l'énergie de charge $E_c(\hat{N} - n_g)^2$. Pour cela, imaginons que l'élément tunnel soit absent du montage. Nous n'aurons alors plus que deux condensateurs en série et entre ces deux condensateurs une île supraconductrice. Les états propres de $E_c(\hat{N} - n_g)^2$ sont bien évidemment des états de Fock $|n\rangle$. Intuitivement

nous pouvons nous douter de ce qu'il va se passer, en effet si $-1/2 < n_g < 1/2$, le système sera dans un état qui minimise $(\hat{N} - n_g)^2$ qui correspond à l'état de charge $|n = 0\rangle$ tel qu'il n'y ait pas de charge en excès sur l'île supraconductrice. Puis, si $1/2 < n_g < 3/2$, l'état de charge minimisant l'énergie de charge sera l'état $|n = 1\rangle, \dots$ etc. Ainsi, le spectre, en fonction du paramètre de contrôle n_g , sera composé d'un ensemble de paraboles centrées autour des valeurs entières de n_g (cf. fig 1.15). Nous voyons que pour des valeurs semi-entières de n_g (i.e $n_g = k + 1/2$, $k \in \mathbb{Z}$) l'état fondamental de l'état de charge est deux fois dégénéré, plus précisément $|k\rangle$ et $|k + 1\rangle$ ont la même énergie. Si nous ajoutons à présent l'élément tunnel, ces niveaux vont se coupler :

$$H_T = -\frac{E_J}{2} \sum_n \left(|n+1\rangle \langle n| + |n\rangle \langle n+1| \right), \quad (1.43)$$

ce qui va donner lieu, au sein du spectre, à un anti-croisement de ces niveaux, au voisinage desquels l'état quantique du système (dans le régime $E_J \ll E_c$) est une superposition de ces états du type $|\psi\rangle = \alpha |k\rangle + \beta |k+1\rangle$. Ainsi, nous voyons qu'il y a une compétition entre deux termes : le terme d'énergie de charge qui tend à localiser l'état du système dans l'espace des charges et le terme d'énergie Josephson, qui tend à localiser l'état dans l'espace des flux (délocaliser dans l'espace des charges, cf. (1.19)). De plus, au voisinage de ces points, les deux premier niveaux sont très séparés du troisième (anharmonicité importante du spectre), il est alors possible de décrire la physique de basse énergie en se restreignant au sous-espace $\{|k\rangle, |k+1\rangle\}$. L'Hamiltonien effectif se réduisant alors à :

$$E_c \left(\frac{1}{2} - n_g \right) \hat{\sigma}_z - \frac{E_J}{2} \hat{\sigma}_x, \quad (1.44)$$

La séparation des niveaux d'énergie de cet Hamiltonien, sera donnée par :

$$\Delta E = E_J \sqrt{1 - \left(\frac{E_C}{E_J} \right)^2 (n_g - k - 1/2)^2}, \quad (1.45)$$

Et les états propres par :

$$|u_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(1 + \alpha^2 \pm \alpha\sqrt{1 + \alpha^2})}} (|k\rangle + (\alpha \pm \sqrt{1 + \alpha^2}) |k+1\rangle), \quad (1.46)$$

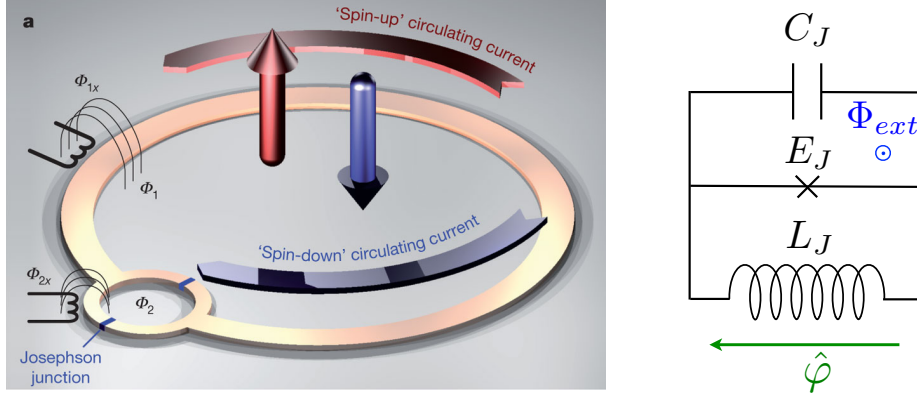


FIGURE 1.16 – Schéma (à gauche, figure extraite de [76]) et schéma électrique (à droite) d'un qubit de type flux, composé d'une jonction Josephson en parallèle avec une boucle d'inductance L_J .

avec $\alpha = -\frac{E_C}{E_J}(n_g - k - 1/2)$. Il est intéressant de noter que lorsque $n_g \rightarrow k + 1/2$, $|u_{\pm}\rangle \rightarrow (|k+1\rangle \pm |k\rangle)/\sqrt{2}$ qui sont les états propres de $\hat{\sigma}_x$. la CPB se comporte alors comme un système à deux niveaux, également appelé qubit (quantum bit). Ce point de fonctionnement de la CPB est par conséquent très intéressant dans le cadre du traitement quantique de l'information (création de superpositions d'états, implémentation d'algorithmes quantiques,...). Nous verrons également plus tard que ce point de fonctionnement correspond à celui pour lequel la dynamique d'interaction de la CPB avec une ligne de transmission est décrite par l'Hamiltonien de Rabi. Il est important de remarquer que les états propres ainsi que les énergies propres de la CPB au voisinage du "sweet spot" ($n_g = 1/2$) dépendent du rapport E_C/E_J et de la valeur de la charge de gate n_g qui peuvent tous deux être contrôlés in situ (en remplaçant la jonction Josephson par un squid). Nous voyons par conséquent apparaître un des intérêts majeur des circuits supraconducteurs : la possibilité de contrôler facilement leurs états propres ainsi que leur spectre.

1.3.2 Le qubit de flux (RF squid)

Le qubit de flux (cf. fig. 1.16) est en quelques sortes le dual de la boîte à paires de Cooper : il est composé d'une jonction Josephson (ou d'un SQUID) en parallèle de laquelle a été placée une boucle d'inductance L_J . La base la plus appropriée pour décrire ce dispositif est la base des flux $|\varphi\rangle$ qui correspondent à des courant permanents circulants

au sein de la boucle. Le contrôle de ces courants se fait par l'intermédiaire d'un flux extérieur appliqué à la boucle Φ_{ext} , ce qui en fait un qubit de type flux. L'Hamiltonien de ce qubit sera donc le suivant :

$$\mathcal{H}_{fluxonium} = E_c(\hat{N} - n_g)^2 - E_J \cos(\hat{\varphi} + \varphi_{ext}) + E_l \hat{\varphi}^2, \quad (1.47)$$

avec $E_c = 2e^2/C_J$ et $E_l = (\Phi_0/2 * \pi)^2/2L_J$. Le potentiel dépendant de $\hat{\varphi}$ n'est cette fois-ci plus périodique et tend vers $+\infty$ lorsque $\hat{\varphi} \rightarrow \pm\infty$. Ceci impose donc de nouvelles conditions aux limites pour les fonctions d'onde du qubit de flux, en particulier $\psi(\varphi \rightarrow \pm\infty) = 0$. Nous voyons ainsi que l'application d'une tension ne modifie pas le spectre car il est possible d'effectuer une transformation unitaire qui élimine la charge n_g :

$$U = e^{in_g \hat{\varphi}}, \quad (1.48)$$

sans changer les conditions aux limites pour la fonction d'onde. Le spectre du RF-squid ne dépendra donc pas de la charge au sein de la boucle, ce qui montre également qu'il ne sera pas du tout sensible aux effets néfastes d'offsets de charge résiduels éventuels au sein de la boucle.

Nous pourrions également essayer d'éliminer la variable de contrôle φ_{ext} de l'Hamiltonien en utilisant la transformation unitaire suivante :

$$U_\varphi = e^{i\varphi_{ext} \hat{n}} \quad (1.49)$$

qui ne change pas les conditions aux limites, ce qui aura pour effet de transformer l'Hamiltonien (1.47) de la manière suivante :

$$U_\varphi^\dagger \mathcal{H}_{fluxonium} U_\varphi = E_c(\hat{N})^2 - E_J \cos(\hat{\varphi}) + E_l(\hat{\varphi} - \varphi_{ext})^2, \quad (1.50)$$

nous voyons ainsi que nous pouvons faire disparaître φ_{ext} du terme d'énergie Josephson mais cependant il rejaillira dans le terme d'énergie inductive. Ainsi, il ne sera jamais possible de l'éliminer de l'Hamiltonien et le spectre du qubit de flux en dépendra. Il est intéressant de noter que dans la limite d'énergie inductive nulle ($E_l \rightarrow 0$), le RF-squid devient une boîte à paires de Cooper. Cependant, l'étude de cette limite n'est pas évidente (en raison notamment des conditions aux limites qui sont périodiques lorsque $E_l = 0$, mais ne le sont plus même pour un E_l infinitésimal), malgré cela il été mis en évidence que dans cette limite les deux dispositifs se comportent de la même manière [83]. L'application

d'un flux extérieur a pour effet de créer un courant au sein de la boucle composée par la jonction Josephson et la bobine. Ainsi, les états qui nous intéresseront seront des superpositions de courant circulant en sens horaire et anti-horaire au sein de la boucle (qui sont l'équivalent des états de charge de la CPB). Intéressons-nous à présent au spectre ainsi qu'aux états propres de l'Hamiltonien (1.50), celui-ci pouvant se mettre sous la forme $\mathcal{H}_{flux} = E_c \hat{N}^2 + V(\hat{\varphi})$ (i.e. une énergie cinétique plus une énergie potentielle). Sous cette forme, le comportement du qubit de flux est formellement identique à celui d'une particule d'énergie cinétique E_c soumise au potentiel $V(\hat{\varphi})$. Comme pour la CPB, nous allons à présent chercher un régime dans lequel le RF-squid est un bon qubit (système à deux niveaux). Examinons de plus près le potentiel $V(\hat{\varphi}) = -E_J \cos(\hat{\varphi} + \varphi_{ext}) + E_l(\hat{\varphi})^2$: c'est un potentiel parabolique modulé par un cosinus, le rapport important pour la caractériser est donc E_l/E_J . Dans la limite $E_l/E_J \gg 1$, $V(\hat{\varphi})$ sera quasiment harmonique ce qui n'est pas ce que nous recherchons, il ne faudra par conséquent pas que E_l soit trop important, si E_l est proche de 0, le RF-squid se comporte quasiment comme une CPB, sans paramètre de contrôle n_g , qui était crucial pour obtenir un bon qubit (cf. fig. 1.15), ce régime est donc également à proscrire. Le bon régime sera alors un régime intermédiaire. De plus, le paramètre φ_{ext} sert en quelques sortes à contrôler l'asymétrie entre $V(\varphi > 0)$ et $V(\varphi < 0)$, lorsque $\varphi_{ext} = \pi$ par exemple, le potentiel possède une structure de double puits au voisinage de $\varphi = 0$ qui est particulièrement intéressante. Une analyse des propriétés de $V(\varphi)$ montre que le nombre de minimas locaux au voisinage de l'origine et la hauteur de la barrière dépendent du rapport E_l/E_J , et il est possible de montrer qu'il faut que $E_l < 2E_J$ pour avoir un potentiel en double puits. Pour un choix de paramètres respectant ces conditions, les deux premiers états propres seront des superpositions symétriques et anti-symétriques des états du fond du puits gauche et droit, le splitting entre ces deux états étant d'autant plus faible que la hauteur de la barrière tunnel ($\sim E_J$) est importante. De plus, plus l'énergie cinétique E_c sera importante et moins la particule sera sensible aux détails de basse énergie du potentiel (la structure en double puits) ce qui va rapprocher les deux premiers niveaux d'énergie du troisième (ce que l'on cherche à éviter pour obtenir un bon qubit). Ces considérations nous amèneraient donc à considérer E_c aussi petit que possible, E_l et E_J pas trop importants. En faisant cela nous aurons donc une fonction d'onde fortement localisée dans l'espace des flux (car E_c est petit). Les fonctions propres et les niveaux d'énergie du RF-squid ont été représentés sur la figure 1.17. Le spectre du RF-squid en fonction du paramètre de contrôle φ_{ext} a également été représenté sur la figure 1.18 .

Nous remarquons qu'au voisinage de $\varphi_{ext} = \pi$ le RF-squid est fortement anharmonique

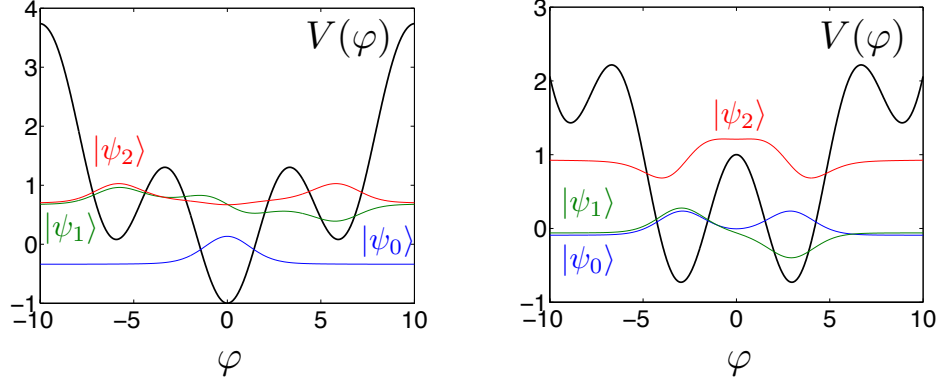


FIGURE 1.17 – Potentiel $V(\varphi)$, énergie et fonctions propres des trois premiers états d'énergie ($|\psi_0\rangle$, $|\psi_1\rangle$ et $|\psi_2\rangle$) pour $E_l = 0.029$, $E_c = E_J = 1$ et $\varphi_{ext} = 0$ (figure de gauche), $\varphi_{ext} = \pi$ (figure de droite). Nous voyons que pour ces choix de paramètres, le spectre est très anharmonique, de plus lorsque $\varphi_{ext} = \pi$ les deux premiers états sont très séparés du troisième, ce qui permet de restreindre l'étude du RF-squid à ses deux premiers niveaux d'énergie ($|\psi_0\rangle$ et $|\psi_1\rangle$) qui correspondent à des superpositions symétriques et anti-symétriques d'états de courant horaire et anti-horaire (flux positif et négatif respectivement).

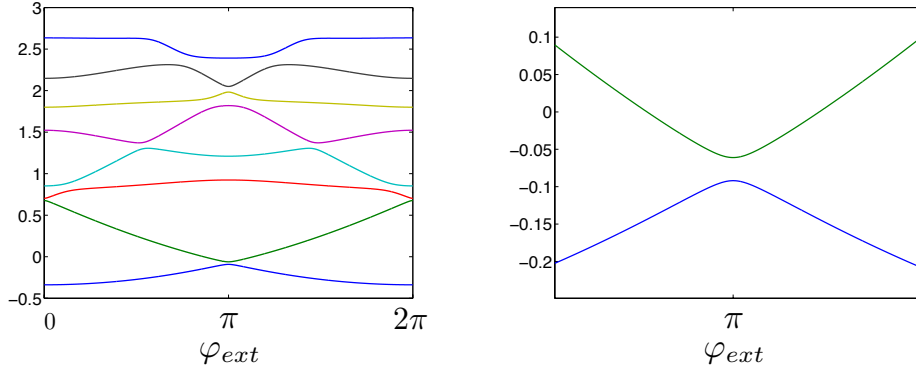


FIGURE 1.18 – Spectre du RF-squid en fonction du paramètre de contrôle φ_{ext} pour $E_l = 0.029$, $E_c = E_J = 1$ (figure de gauche) et zoom sur l'anti-croisement au voisinage duquel le RF-squid se comporte comme un qubit (figure de droite).

ce qui en fait un bon qubit et nous avons de plus une structure semblable à celle de la CPB avec un anti-croisement de niveaux. Il est alors possible de faire le même genre d'analyse que dans le cas de la CPB en projetant l'Hamiltonien (1.47) sur la base de ses

deux premiers niveaux d'énergie. Le splitting étant alors donné par :

$$\Delta E = \sqrt{\omega^2 + \beta^2 \left(1 - 2 \frac{\Phi_{ext}}{\Phi_0}\right)^2} \quad (1.51)$$

avec ω , la fréquence du qubit au sweet spot ($\Phi_{ext} = \Phi_0/2$) et β une constante dépendant des différentes énergies du problème qui varie linéairement en fonction de l'énergie inductive E_L [55, 45] ($\beta = \zeta E_L$). Pour ce choix de paramètres les états du qubit seront donc des superpositions symétriques et antisymétriques de courant circulants dans le sens horaire et anti-horaire au sein de la boucle composée par la jonction Josephson et l'inductance L_J .

Nous avons donc passé en revue les deux grandes familles de qubits : les qubits de flux et les qubits de charge. Il en existe une troisième : les qubits de phase [55, 45] que nous ne décrirons pas ici, car nous n'allons pas nous y intéresser par la suite.

1.3.3 Effet du couplage à l'environnement

Lorsque l'on cherche à créer des superpositions quantiques d'états pour faire des opérations d'informatique quantique par exemple, il convient de s'affranchir au maximum du couplage du système à l'environnement qui va causer des processus non désirés tels que de la relaxation ou de la perte de cohérence au sein de la superposition. Ces processus peuvent avoir plusieurs origines : impuretés (de charge ou magnétique) au sein du circuit, environnement électromagnétique du circuit, bruit dans les variables de contrôle (n_g et Φ_{ext}),...etc. Une des pistes à explorer pour améliorer le temps de vie de ces superpositions est alors de limiter leur sensibilité aux bruit des paramètres de contrôle extérieurs ce qui a donné naissance à deux nouveaux types de qubit : le Transmon et le Fluxonium qui sont des variantes de la CPB et du RF-squid respectivement. L'effet du bruit des variables de contrôle aux points de fonctionnement décrits précédemment (sweet spot) va être donnée par les dérivées d'ordre successives du splitting entre les deux états formant le qubit par rapport aux paramètre de contrôle (n_g et Φ_{ext}).

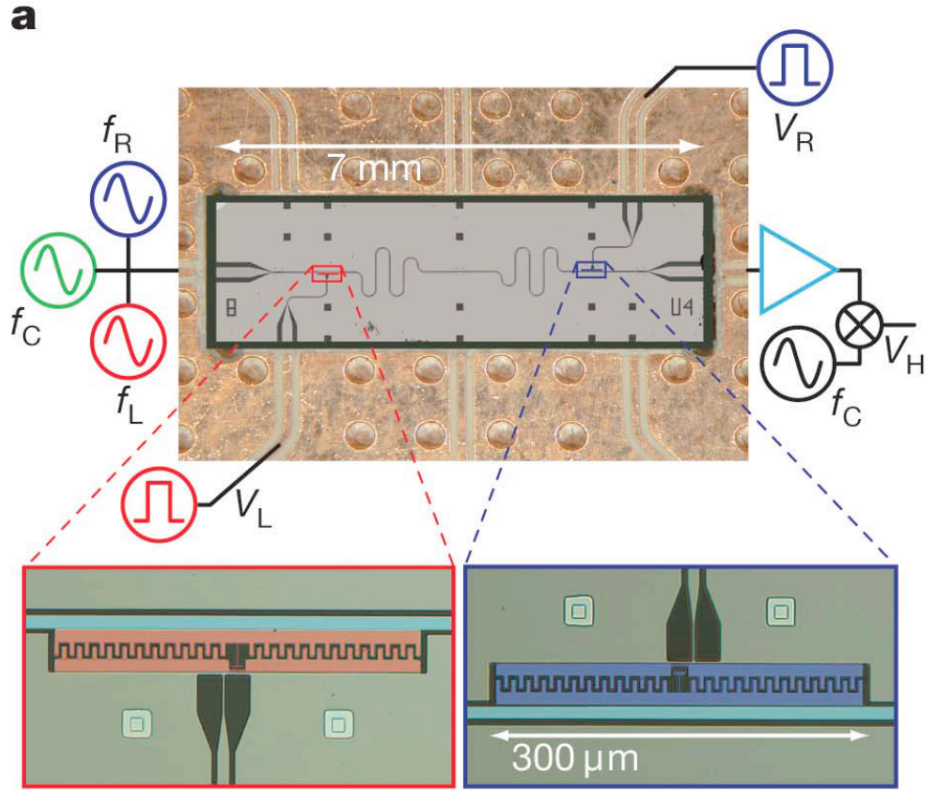


FIGURE 1.19 – Vue au microscope d’une ligne de transmission coplanaire supraconductrice au sein de laquelle ont été placés deux transmons (rouge et bleu) qui sont composés d’un squid en parallèle duquel est branchée une capacité de valeur importante. (figure extraite de [137])

Transmon

Pour la CPB, les dérivées première et seconde du splitting entre les niveaux de plus basse énergie en fonction de la charge de gate n_g sont donnés par :

$$\frac{\partial \Delta E}{\partial n_g} = 2E_J \left(\frac{E_c}{E_J} \right)^2 \frac{n_g - \frac{1}{2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{E_c}{E_J} \right)^2 (n_g - \frac{1}{2})^2}},$$

$$\frac{\partial^2 \Delta E}{\partial n_g^2} = E_J \left\{ 2 \left(\frac{E_c}{E_J} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{E_c}{E_J} \right)^2 (n_g - \frac{1}{2})^2}} - \left(\frac{E_c}{E_J} \right)^4 \frac{(n_g - \frac{1}{2})^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{E_c}{E_J} \right)^2 (n_g - \frac{1}{2})^2}} \right\},$$

(1.52)

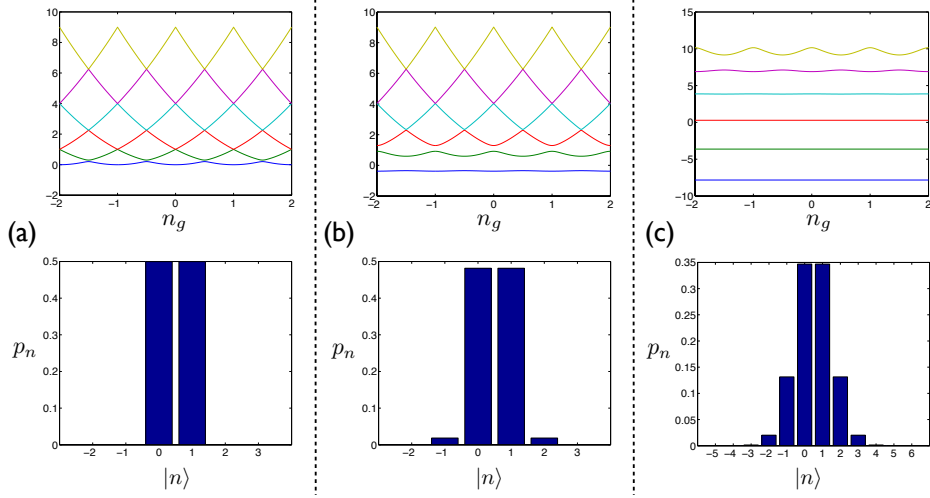


FIGURE 1.20 – Spectres (figures du haut) et probabilité p_n des états à n charges $|n\rangle$ dans l'état fondamental (figures du bas), pour $E_J/E_c = 0.1$ (a), 1(b), 10(c). Plus le rapport de l'énergie Josphehon et de charge est important, moins le spectre est anharmonique et plus la fonction d'onde de l'état fondamental est délocalisée dans l'espace des états de charge.

Ainsi, au sweet spot ($n_g = 1/2$) nous aurons :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \Delta E}{\partial n_g} \right|_{n_g=1/2} &= 0, \\ \left. \frac{\partial^2 \Delta E}{\partial n_g^2} \right|_{n_g=1/2} &= 2E_J \left(\frac{E_c}{E_J} \right)^2, \end{aligned} \quad (1.53)$$

nous voyons ainsi qu'au sweet spot la CPB est naturellement protégée au premier ordre des fluctuations de charge, cependant elle sera sensible au second ordre et cet effet sera d'autant plus faible que le rapport E_c/E_J sera faible. Cette considération a mené à une nouvelle génération de qubit de charge : le Transmon (cf. fig. 1.19). Ce nouveau qubit est essentiellement une CPB au sein de laquelle un condensateur de très grande capacité a été placé en parallèle de la jonction Josephson (SQUID). Ceci a pour effet de diminuer l'énergie de charge qui auparavant était proportionnelle à $1/(C_g + C_J)$ et est à présent proportionnelle à $1/(C_g + C_J + C_c)$ avec C_c la capacité du condensateur placé en parallèle de la jonction. Le fait de diminuer le rapport E_c/E_J a deux effets (cf. fig. 1.20) : le premier est de délocaliser la fonction d'onde dans l'espace des charges, ce qui a pour effet de minimiser l'effet des fluctuations de n_g , le second est de diminuer l'anharmonicité du spectre de la CPB ce qui rend l'approximation de systèmes à deux niveaux de moins en

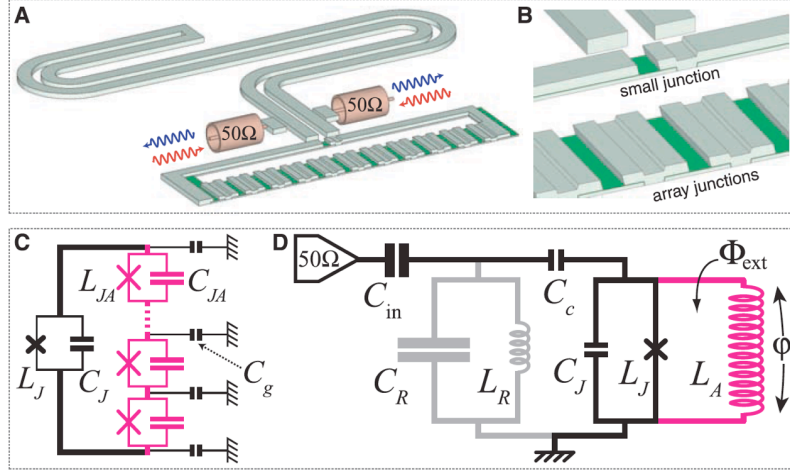


FIGURE 1.21 – Schéma d’une ligne de transmission coplanaire supraconductrice (A), à laquelle a été couplé capacitivement un Fluxonium composé d’une petite jonction Josephson en parallèle de laquelle est branchée une chaîne de grandes jonctions Josephson (B) qui se comporte de manière effective comme une inductance de valeur importante (C et D) (figure extraite de [94]).

moins justifiée. Dans le cas limite $E_J \gg E_c$ le Transmon est même quasi harmonique. Si nous reprenons l’analogie de la CPB avec un rotor chargé, le fait d’avoir une énergie Josephson élevée serait équivalent à avoir une masse importante ce qui restreint l’angle que peut explorer le rotor à des angles proches de 0 (faible amplitude d’oscillations), il est alors possible de développer $\cos \hat{\varphi}$ en série dont nous conserverons les termes les plus bas et nous voyons que la CPB se comportera d’autant plus comme un oscillateur harmonique que E_J sera grand. Cependant, pour la plupart des applications en circuit-QED, en ayant une maîtrise suffisante des paramètres de contrôle (notamment des temps d’interaction), il est possible de s’arranger pour ne peupler de manière significative que les deux premiers niveaux du Transmon et l’approximation de système à deux niveaux restera valable (en limitant le bruit i.e. la largeur spectrale des niveaux d’énergie).

Fluxonium

Il est possible de faire le même genre de calcul pour le RF-squid et nous obtiendrons alors :

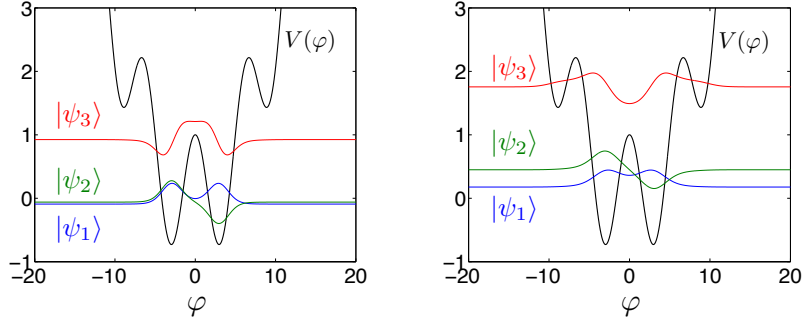


FIGURE 1.22 – Potentiel, trois premiers niveaux d'énergie et représentation de leurs fonctions d'onde centrées sur leur énergie propre respective pour $E_c = E_J$, $E_c/E_l = 1/0.029 \approx 34.5$ (figure de gauche) et $E_c = 3E_J$, $E_c/E_l = 3/0.029 \approx 103.5$. Nous voyons que plus le rapport E_c/E_l est important, plus la fonction d'onde est délocalisée dans l'espace des flux ($\Delta N/\Delta\varphi \approx 0.17$ dans l'état fondamental pour la figure de gauche et $\Delta N/\Delta\varphi \approx 0.1$ pour la figure de droite).

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \Delta E}{\partial n_g} \right|_{\Phi_{ext}=\Phi_0/2} &= 0 \\ \left. \frac{\partial^2 \Delta E}{\partial n_g^2} \right|_{\Phi_{ext}=\Phi_0/2} &= \omega(\zeta E_l)^2, \end{aligned} \quad (1.54)$$

et nous voyons que le RF-squid sera d'autant plus sensible aux bruits de flux que l'énergie inductive E_l sera grande, l'idée est alors d'augmenter la valeur de l'inductance L_J . L'effet recherché est de délocaliser les fonctions d'onde dans l'espace des flux, il faut donc faire en sorte de diminuer E_l sans trop diminuer E_c , cependant en utilisant une boucle plus grande, nous diminuerons simultanément E_l et E_c (car un bout de fil possède à la fois une inductance et une capacité propres). De plus, il est relativement difficile d'obtenir des inductances importantes avec des fils (dont l'inductance propre par unité de longueur est faible). L'idée est alors d'utiliser une chaîne de jonctions Josephson [94] (cf. fig. 1.21) se comportant de manière effective comme une inductance de forte valeur, ce qui a donné naissance à une nouvelle génération de qubits de flux : le Fluxonium, moins sensible aux bruits de flux car plus délocalisé dans l'espace des flux (cf. fig 1.22). Le premier Fluxonium réalisé expérimentalement [94] se situe même dans le régime de charge car le rapport $\Delta\hat{N}/\Delta\hat{\varphi} = 0.5$ dans l'état fondamental, ce qui signifie que les fluctuations de charges sont moins importantes que les fluctuations de flux (la fonction

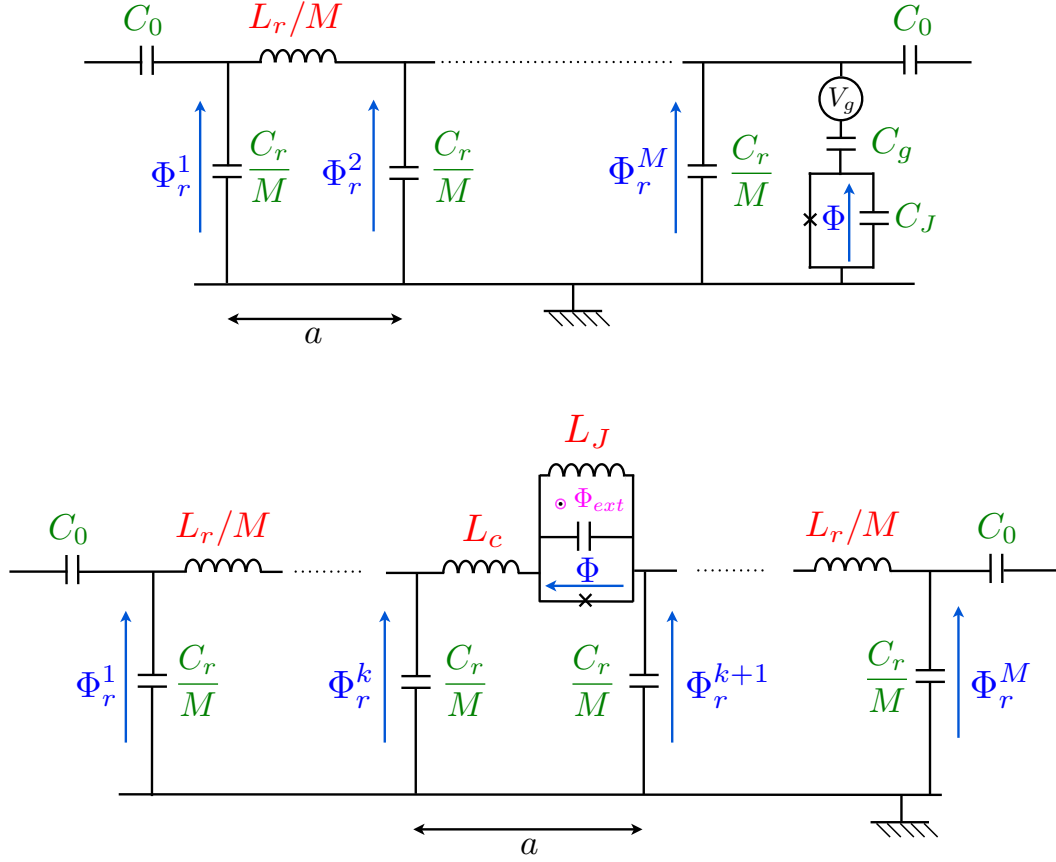


FIGURE 1.23 – Schémas d'une boîte à paires de Cooper couplée capacitivement (par l'intermédiaire du condensateur C_g) à une ligne de transmission (en haut) et d'un RF-squid couplé inductivement (par l'intermédiaire de la bobine d'inductance L_c) à une ligne de transmission. La position des qubits a été choisie de telle manière à maximiser l'amplitude de l'interaction entre ceux-ci et la ligne de transmission (cf. fig. 1.8) : la CPB a été placée à l'extrémité de la ligne de transmission ce qui correspond au maximum de l'amplitude des fluctuations des modes de charges, le RF-squid a quant à lui été placé en milieu de la ligne de transmission ce qui correspond au maximum des fluctuations du premier mode de courant.

d'onde est plus localisée dans l'espace des charges que dans l'espace des flux).

1.3.4 Les différents types de couplage entre atomes artificiels et ligne de transmission

Après avoir passé en revue les deux grandes classes de qubits supraconducteurs (charge et flux), nous allons voir comment les coupler à une ligne de transmission. Il existe deux façons de faire cela (cf. fig. 1.23) : soit via un condensateur (couplage capacitif), dans ce cas ce sera le degré de liberté de charge du qubit qui se couplera aux fluctuations de charge de la ligne de transmission ; soit via une bobine (couplage inductif) et dans ce cas ce sera le flux au sein du qubit qui se couplera aux fluctuations du flux de la ligne de transmission. Le couplage capacitif peut être vu comme l'équivalent du couplage dipolaire-électrique dans le cas de la cavity-QED, le couplage inductif quant à lui peut être vu comme l'équivalent du couplage dipolaire-magnétique. Cependant, comme nous allons le voir, à l'inverse de ce qu'il se passe en physique atomique, en circuit-QED le couplage inductif peut-être supérieur au couplage capacitif (tandis qu'en physique atomique le couplage dipolaire magnétique est plusieurs ordres de grandeur plus faible que le couplage dipolaire-électrique en raison de la faible valeur du magnéton de Bohr et est souvent négligé). Ceci est dû au fait que dans le cadre de la circuit-QED ce ne sont pas des champs électrique et magnétique qui interviennent, mais des variables macroscopiques telles que le flux qui représente l'intégrale du champ magnétique sur une surface, et la charge qui est la somme d'un nombre macroscopique de charges élémentaires.

Couplage capacitif d'une CPB à une ligne de transmission.

Considérons pour commencer une CPB couplée capacitivement à une ligne de transmission. Si nous souhaitons par exemple coupler la charge de l'atome artificiel au premier mode de charge de la ligne de transmission, il faudra le placer à l'une des extrémités de celle-ci pour maximiser l'interaction entre ces deux degrés de liberté. En effet, c'est à cet endroit que l'amplitude des fluctuations de charge au sein de la ligne de transmission est maximale (cf. fig. 1.8). L'Hamiltonien décrivant ce système est obtenu par la procédure décrite précédemment et possède la forme suivante, en ayant conservé uniquement le mode de charge à résonance avec la fréquence des deux niveaux de plus basse énergie de la CPB :

$$\mathcal{H} = \tilde{E}_c(\hat{N} - n_g)^2 - E_J \cos \hat{\varphi} + \hbar\tilde{\omega}\hat{a}^\dagger\hat{a} + G\hat{N}_r(x=L)\hat{N}, \quad (1.55)$$

avec $\tilde{E}_c = 2e^2(\frac{C_r/M+C_g}{C_\Sigma^2})$ l'énergie de charge de la CPB renormalisée (par le couplage à la ligne de transmission), $C_\Sigma^2 = C_r/M(C_g + C_J) + C_g C_J$, $G = 2e\sqrt{\hbar\pi/\tilde{Z}}\frac{C_g}{C_\Sigma^2}$ l'énergie de couplage "lumière-matière", $\tilde{Z} = \sqrt{L_r/\tilde{C}_r}$ et $\tilde{\omega} = \pi/\sqrt{L_r\tilde{C}_r}$ l'impédance et la fréquence de la ligne de transmission renormalisées, $\tilde{C}_r = C_r + C_g C_J/(C_g + C_J)$ étant la capacité de la ligne de transmission renormalisée. Ainsi au sweet spot ($n_g = 1/2$), nous aurons alors :

$$\mathcal{H}/\hbar = \frac{\omega_0}{2}\hat{\sigma}_z + \omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + ig\hat{\sigma}_x(\hat{a} - \hat{a}^\dagger), \quad (1.56)$$

avec $g = 2\tilde{\omega}\sqrt{\tilde{Z}/Z_{vac}}\sqrt{\alpha}\frac{C_g\tilde{C}_r}{C_\Sigma^2}$, avec α la constante de structure fine ($\alpha \approx 1/137$) et Z_{vac} , l'impédance du vide ($Z_{vac} = 2\alpha\hbar/e^2 \approx 377\Omega$). Nous aurons donc une fréquence normalisée à la fréquence de cavité égale à :

$$\frac{g}{\tilde{\omega}} = 2\sqrt{\frac{\tilde{Z}}{Z_{vac}}}\frac{C_g\tilde{C}_r}{C_\Sigma^2}\sqrt{\alpha}, \quad (1.57)$$

pour une CPB couplée capacitivement à une ligne de transmission. Ce couplage normalisé est à comparer aux couplages de cavity-QED [42, 19, 113] atteignables en utilisant des atomes de Rydberg par exemple tel que dans les expériences du LKB [69] :

$$\frac{g}{\omega_{eg}} = \frac{\alpha^{3/2}}{n} \frac{1}{\tilde{\nu}}, \quad (1.58)$$

avec n l'état de Rydberg dans lequel se trouvent les atomes, et $\tilde{\nu}$ le rapport du volume de la cavité et du volume du mode avec lequel les atomes interagissent ($\tilde{\nu} = V_{cav}/V_M = V_{cav}/(\lambda/2)^3$), λ étant la longueur d'onde du mode, généralement tels que $\tilde{\nu} \gg 1$, le volume de la cavité étant en général égal à plusieurs fois λ^3 .

Il est important de remarquer que dans le cas des circuits, la constante de structure fine apparait à la puissance 1/2 ($\alpha^{1/2} \approx 0.1$), tandis que pour les atomes en cavité elle apparait à la puissance 3/2 ($\alpha^{3/2} \approx 6 \times 10^{-4}$). De plus, le fait d'utiliser des cavité de volume important et des atomes de Rydberg fait encore baisser la valeur de g/ω_{eg} pour les atomes en cavité qui atteint des valeurs typiques de 10^{-6} [113, 97]. Aux vues de la formule (1.58) il est légitime de s'interroger sur l'emploi d'atomes de Rydberg qui semblent diminuer l'amplitude de l'interaction lumière-matière : la réponse est à chercher du côté d'une autre quantité plus appropriée dans ce cas la coopérativité optique $gQ/\omega_{eg} = \alpha^{-3/2}n/\sqrt{\tilde{\nu}}$ ($Q = \omega_{cav}/\kappa$ étant le facteur de qualité de la cavité optique) qui

est d'autant plus important que l'état de Rydberg n est élevé, ce qui permet d'atteindre le régime de couplage fort ($gQ/\omega_{eg} \gg 1$) en utilisant des atomes de Rydberg. Nous voyons ainsi que les atomes artificiels couplé capacitivement à une ligne de transmission permettent d'atteindre des régime de couplage lumière-matière bien plus importants que les atomes en cavité. Il est même possible d'avoir des couplages capacitifs plus importants encore en renonçant à l'approximation de système à deux niveaux et en utilisant un Transmon ($E_J \gg E_c$) à la place de la CPB, car alors les éléments de matrice $\langle i | \hat{N} | j \rangle \propto (E_J/E_c)^{1/4}$ ($|i\rangle$ et $|j\rangle$ étant les états propres du Transmon) auront une valeur importante du fait de la forte délocalisation de la fonction d'onde dans l'espace des états de charge, qui permettent sous certaines conditions d'atteindre des couplages $g/\tilde{\omega} \approx 1$ [42]. Dans ce nouveau régime de couplage lumière-matière, appelé "régime de couplage ultra-fort" [33], le comportement du système est totalement différent de celui décrit par le modèle de Jaynes-Cummings, car alors les termes anti-résonnants ne sont plus négligeables ce qui va faire l'objet des sections suivantes.

Couplage inductif d'un RF-squid à une ligne de transmission.

Comme nous l'avons déjà signalé, contrairement à la cavity-QED dans le cadre de laquelle l'interaction dipolaire magnétique est habituellement négligée à juste titre (car extrêmement faible par rapport à l'interaction dipolaire électrique), en circuit-QED, l'équivalent de cette interaction qui résulte du couplage inductif d'un atome artificiel à une ligne de transmission, peut être comparable voir même supérieur au couplage capacitif. La seconde catégorie de couplage à considérer est donc le couplage inductif (cf fig. 1.23). Le condensateur C_g et la tension de gate n_g n'ayant plus vraiment de sens dans ce cas, il est préférable de considérer un RF-squid couplé inductivement à la ligne de transmission pour pouvoir faire une approximation de système à deux niveaux. Dans ce cas précis, l'Hamiltonien du circuit sera :

$$\mathcal{H} = \tilde{E}_l \hat{\varphi}^2 - E_J \cos \hat{\varphi} + \varphi_{ext} + \hbar \tilde{\omega} \hat{a}^\dagger \hat{a} - \frac{1}{L_c} \hat{\Phi}(\Phi_r(L/2 + a/2) - \Phi_r(L/2 - a/2)), \quad (1.59)$$

avec $\tilde{E}_l = (\Phi_0/2\pi)^2(1/L_c + 1/L_J)$, $\tilde{\omega} = \pi/\sqrt{\tilde{L}_r C_r}$. En effet, le flux du qubit se couple au courant dans la ligne de transmission et non au flux de celle-ci (ce qu'il est possible de démontrer en prenant un modèle de ligne de transmission distribué et en faisant tendre la taille des cellules vers 0). Ainsi pour maximiser le couplage lumière-matière il faut placer

le qubit à un endroit où les fluctuations de courants sont maximales, ce qui correspondrait au centre de la ligne de transmission pour le premier mode de courant (cf. fig. 1.8). En ne conservant que les deux niveaux résonnants (le fondamental étant noté $|g\rangle$ et le premier excité $|e\rangle$) avec le premier mode de la ligne de transmission, nous obtenons :

$$g = -2 \sin(\pi/2M) \frac{\tilde{\omega}}{2} \frac{\tilde{L}_r}{L_c} \sqrt{\frac{Z_{vac}}{\tilde{Z}}} \alpha^{-1/2} \langle g | \hat{\varphi} | e \rangle, \quad (1.60)$$

avec $\tilde{Z} = \sqrt{\tilde{L}_r/C_r}$. Le couplage lumière-matière est cette fois-ci proportionnel à $\alpha^{-1/2}$ ce qui est encore plus favorable que dans le cas d'un couplage capacitif et permet sous certaines conditions d'avoir des couplage de l'ordre de $g/\hbar\omega_0 \approx 20$ [42]. Nous voyons donc qu'un couplage inductif permet en théorie, d'atteindre le régime de couplage ultra-fort de manière encore plus aisée qu'un couplage capacitif.

Ces considérations nous amènent donc à nous interroger sur les différences qualitatives et quantitatives entre les modèles de Rabi et de Jaynes-Cummings en régime de couplage ultra-fort, ce qui sera l'objet de la prochaine section.

1.4 Régime de couplage ultra-fort.

1.4.1 Modèle de Rabi vs. modèle de Jaynes-Cummings.

Le modèle de Rabi est un modèle de Jaynes-Cummings avec termes anti-résonnants (i.e. sans approximation de l'onde tournante), ces termes sont habituellement négligés pour de bonnes raisons car en général les régimes considérés sont tels que $g \ll \sqrt{\omega\omega_0}$, notamment dans le cadre du régime de couplage fort. Cependant, en régime de couplage ultra-fort [33] ($g \sim \omega_0$), ces termes ne sont plus négligeables et ont une incidence sur le spectre et les propriétés du système. Il est alors nécessaire d'utiliser le modèle de Rabi pour décrire les propriétés du système :

$$\mathcal{H}_{Rabi}/\hbar = \omega_{cav} \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\omega_0}{2} \hat{\sigma}_z + g(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-)(\hat{a} + \hat{a}^\dagger). \quad (1.61)$$

La seule différence entre cet Hamiltonien et l'Hamiltonien de Jaynes-Cummings est la présence ou l'absence des termes dits anti-résonnants ($\hat{\sigma}_- \hat{a} + \hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger$) qui comme nous allons le voir est cruciale lorsqu'on considère le régime de couplage ultra-fort. Le premier effet de ces termes est qu'il n'existe pas de solution simple pour trouver les états propres

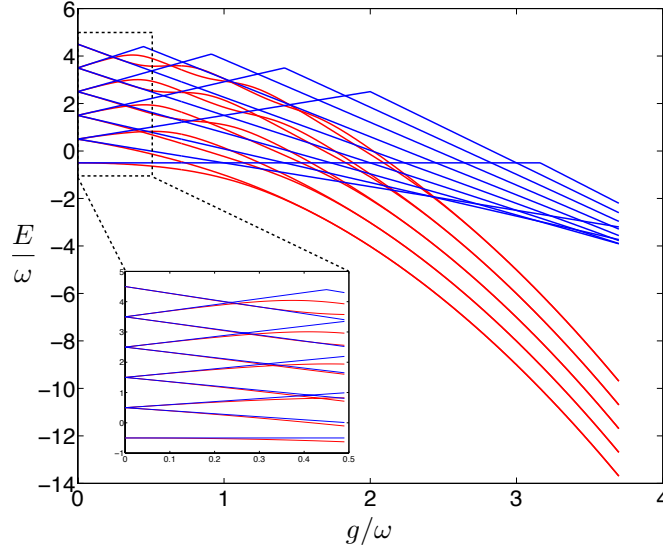


FIGURE 1.24 – Spectres des modèles de Rabi et de Jaynes-Cummings, respectivement en rouge et en bleu.

et les vecteurs propres de ce modèle quelle que soit le jeu de paramètres considéré, bien qu'il ait été prouvé que celui-ci est intégrable [26] et que d'autres études aient analysé ses propriétés dans des régimes de très fort couplage ($g \gg \omega_0$) [32]. Ceci vient du fait que contrairement au modèle de Jaynes-Cummings, le modèle de Rabi n'est pas diagonal par bloc : les termes anti-résonnants couplent les blocs du modèle de Jaynes-Cummings. La quantité conservée pour le modèle de Rabi, qui est la parité ($\exp[i\pi\{\hat{a}^\dagger\hat{a} + (\hat{\sigma}_z + 1)/2\}]$), n'est pas aussi intéressante que le nombre d'excitations ($\hat{a}^\dagger\hat{a} + (\hat{\sigma}_z + 1)/2$) dans le cas de Jaynes-Cummings. Pour bien comprendre les différences entre ces deux modèles, nous allons dans un premier temps essayer, à l'aide de diagonalisations numériques, de voir quels sont les régimes à partir desquels les deux modèles sont à la fois quantitativement et qualitativement différents. Commençons par jeter un oeil à leurs spectres respectifs (cf. fig. figure 1.24), nous pouvons remarquer que contrairement au spectre du modèle de Jaynes-Cummings, il n'y a pas de croisement de niveaux au sein du spectre du modèle de Rabi. L'explication en est assez simple, nous avons vu que l'Hamiltonien de Jaynes-Cummings préservait le nombre d'excitations qui par ailleurs était un bon nombre quantique pour étiqueter les états propres du système. Les termes anti-résonnants du modèle de Rabi couplent ces états propres qui auparavant évoluaient indépendamment les uns des autres lorsqu'on variait le couplage lumière-matière g . Ainsi, les croisements se sont transformés en anti-croisements (les niveaux d'énergie se "repoussent"). Ceci a

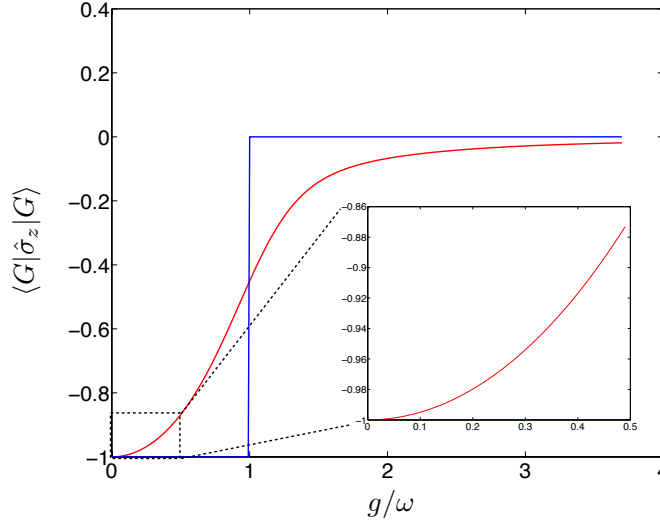


FIGURE 1.25 – Différence de population $\langle G | \hat{\sigma}_z | G \rangle$ ($|G\rangle$ étant l'état fondamental du système) entre l'état excité et l'état fondamental du système à deux niveaux pour les modèles de Rabi (rouge) et de Jaynes-Cummings (bleu).

pour conséquence première, de manière évidente, une différence importante entre les spectres à fort couplage, qui cependant restent très proches lorsque $g \ll \omega, \omega_0$. La seconde conséquence sera un comportement totalement différent des valeurs moyennes des observables dans l'état fondamental.

Intéressons-nous à présent à la valeur moyenne de l'opérateur σ_z (cf. fig. 1.25) qui représente la différence de population entre l'état excité et l'état fondamental du système à deux niveaux. Nous voyons tout d'abord que cette quantité évolue de manière continue pour le modèle de Rabi et de manière discontinue pour le modèle de Jaynes-Cummings. Cela s'explique par des croisements dans le spectre de Jaynes-Cummings tandis qu'au sein du spectre de Rabi il y a des anti-croisements. Nous remarquons également qu'à partir d'un couplage lumière-matière de l'ordre de 0.4, il y a une différence de 10% entre la valeur moyenne de σ_z dans le cas Rabi et celle dans le cas Jaynes-Cummings qui s'aggrave pour atteindre jusqu'à 50% aux alentours de $g/\omega = 0.5$. Ainsi nous voyons qu'à la fois qualitativement et quantitativement, cette quantité diffère d'un modèle à l'autre.

Intéressons-nous également au nombre moyen de photons dans le niveau fondamental (cf. fig. 1.26). Nous remarquons un fait important : contrairement au fondamental du modèle de Jaynes-Cummings, le fondamental du modèle de Rabi contient des photons

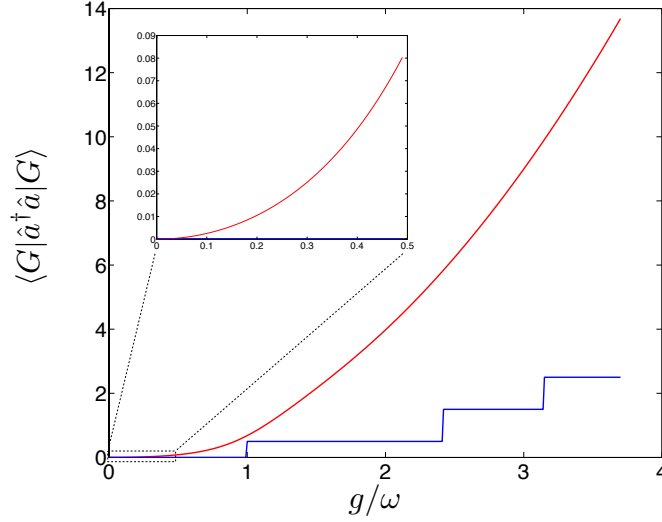


FIGURE 1.26 – Nombre moyen de photons dans le fondamental pour les modèles de Rabi et de Jaynes-Cummings, respectivement en rouge et en bleu.

"virtuels" à couplage faible. De plus, le nombre moyen de photon est continu dans le cas Rabi, alors qu'il est discontinu dans le cas Jaynes-Cummings. L'explication est à nouveau des croisements de niveaux pour Jaynes-Cummings et des anti-croisement pour Rabi. Enfin, des différences importantes entre les valeurs moyennes du nombre de photons apparaissent de manière flagrante à fort couplage.

Il existe donc une différence importante entre les états fondamentaux des deux modèles en régime de couplage ultra-fort ($g \gg \omega_0$). Pour le modèle de Rabi en couplage ultra-fort, il est possible de négliger le seul terme borné de l'Hamiltonien ($(\omega_0/2)\hat{\sigma}_z$) et de considérer alors l'Hamiltonien suivant :

$$\mathcal{H}_{Rabi}/\hbar \approx \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + g \hat{\sigma}_x (\hat{a} + \hat{a}^\dagger). \quad (1.62)$$

Le seul opérateur atomique apparaissant dans l'Hamiltonien étant σ_x , il est possible de chercher l'état fondamental de celui-ci sous la forme d'un produit tensoriel $|\eta\rangle |\zeta\rangle$ avec $|\eta\rangle$ un état propre de σ_x ($\sigma_x |\eta\rangle = \eta |\eta\rangle$, $\eta = \pm 1$). Nous pourrions ainsi mettre l'Hamiltonien (1.62) sous la forme :

$$\mathcal{H}_{Rabi}/\hbar \approx \omega \left(\hat{a}^\dagger + \frac{g}{\omega} \eta \right) \left(\hat{a} + \frac{g}{\omega} \eta \right) - \frac{g^2}{\omega} \eta^2, \quad (1.63)$$

et introduire les opérateurs de création de destruction suivants : $\hat{b} = \hat{a} + \frac{g}{\omega}\eta$, pour finalement mettre l'Hamiltonien sous la forme $\mathcal{H}_{Rabi}/\hbar \approx \omega\hat{b}^\dagger\hat{b} - E_G$ avec $E_G = -\frac{g^2}{\omega}\eta^2$. La recherche de l'état fondamental pour la partie photonique revient alors à chercher un état vérifiant $\hat{b}|\zeta\rangle = 0$ soit encore $\hat{a}|\zeta\rangle = -(g\eta/\omega)|\zeta\rangle$ qui est justement la définition d'un état cohérent. Ainsi l'état fondamental sera de la forme $|G\rangle = |\eta\rangle| -g\eta/\omega\rangle$ et devra minimiser l'énergie E_G , c'est ainsi que nous voyons apparaître une dégénérescence entre deux états fondamentaux : en effet pour $\eta = 1$ et $\eta = -1$, E_G a la même valeur. Cependant, grâce à la théorie des perturbations, en incluant à nouveau le terme $(\omega_0/2)\hat{\sigma}_z$ en tant que perturbation et en exprimant l'Hamiltonien de Rabi total (1.6) dans le sous espace $\{|+\rangle| -g/\omega\rangle, |-\rangle| g/\omega\rangle\}$:

$$\begin{pmatrix} -g^2/\omega & \frac{\omega_0}{2}e^{-2g^2/\omega^2} \\ \frac{\omega_0}{2}e^{-2g^2/\omega^2} & -g^2/\omega \end{pmatrix}, \quad (1.64)$$

il nous est possible de lever la dégénérescence entre les deux états et d'obtenir le vrai fondamental ainsi que le premier état excité (noté respectivement $|u_-\rangle$ et $|u_+\rangle$) :

$$|u_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle| -g/\omega\rangle \pm |-\rangle| g/\omega\rangle), \quad (1.65)$$

ainsi que les énergies propres associées :

$$E_\pm/\hbar = -\frac{g^2}{\omega} \pm \frac{\omega_0}{2}e^{-2g^2/\omega^2}. \quad (1.66)$$

Nous pouvons également en déduire l'écart en énergie entre ces deux états quasi-dégénérés :

$$\Delta E/\hbar = \omega_0 e^{-2g^2/\omega^2}. \quad (1.67)$$

Nous voyons donc que les états propres de l'Hamiltonien de Rabi en régime de couplage ultra-fort sont des états qui sont plus communément appelés "chats de Schrödinger" dans la littérature [69], qui possèdent une forte intrication lumière-matière. Nous avons tracé sur la figure 1.27 la différence entre la valeur numérique et la valeur approchée (1.67) de l'écart énergétique entre les deux états et nous voyons que la différence n'est plus significative à partir de $g/\omega \approx 1$. Nous avons également tracé le recouvrement entre l'état fondamental numérique et l'état fondamental approché en fonction de g/ω (cf. fig. 1.28) et nous constatons que le recouvrement est toujours supérieur à 94%.

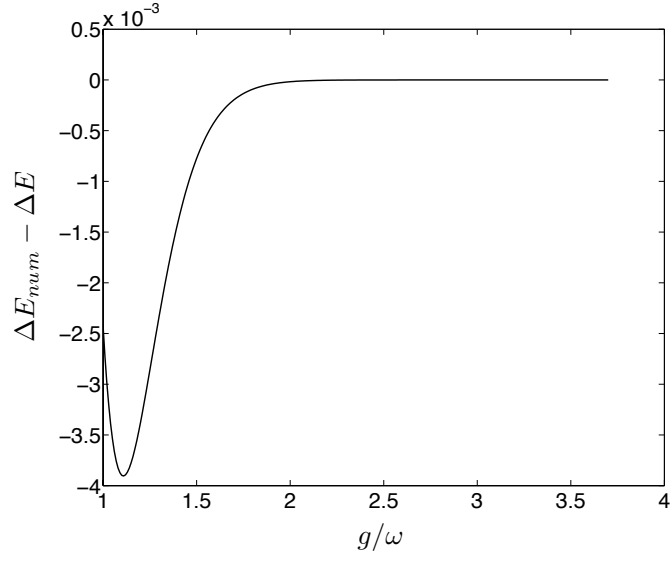


FIGURE 1.27 – Différence entre ΔE approché (1.67) et ΔE numérique.

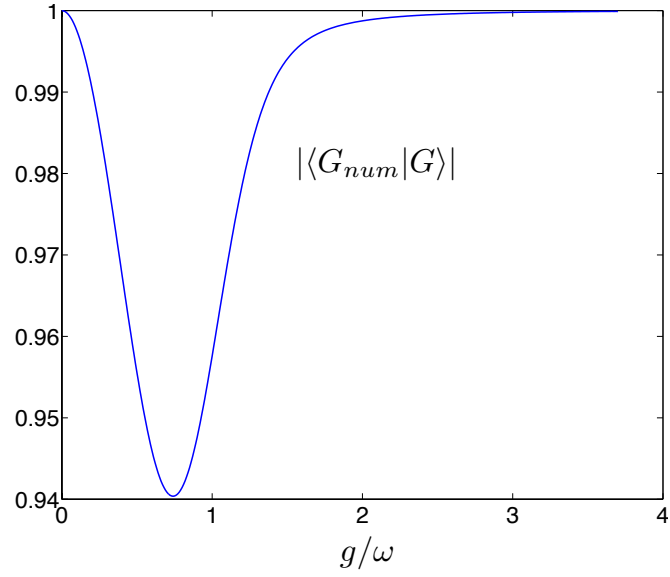


FIGURE 1.28 – Recouvrement $|\langle u_- | G \rangle|^2$ entre $|u_- \rangle$ et l'état fondamental $|G \rangle$ calculé numériquement.

Pour conclure, ces deux modèles à atome unique nous ont permis d'introduire l'intérêt principal du régime de couplage ultra-fort : dans ce régime, l'état fondamental est un état intriqué lumière-matière qui possède des propriétés intéressantes. Cependant, les états

fondamentaux du modèle de Rabi et du modèle de Jaynes-Cummings sont très différents : un état chat de Schrödinger pour le premier et une superposition entre les états $|n, \uparrow\rangle$ et $|n+1, \downarrow\rangle$ pour le second. Nous venons donc de voir une première limite intéressante : la limite de couplage ultra-fort. Cependant, avec des systèmes d'Electrodynamique quantique en cavité par exemple il n'est pas possible d'atteindre des régimes tels que le couplage lumière matière soit supérieur à la fréquence du système à deux niveaux avec un atome unique. Il faut donc trouver une autre stratégie pour atteindre ces régimes : coupler la lumière à un grand nombre d'atomes. Cet ensemble d'atomes (de pseudo-spins $1/2$) se comportera alors comme un gros spin de taille $N_{at}/2$ (N_{at} étant le nombre de pseudo-spins ou d'atomes) et le couplage lumière matière sera $\sqrt{N_{at}}$ fois plus grand (cf. fig. 1.4), ce qu'il est également possible de faire en circuit-QED [57] et qui permettrait en théorie d'atteindre un régime de couplage ultra-fort "collectif". Ceci va donc nous amener à considérer une autre limite asymptotique intéressante : la limite thermodynamique ($N_{at} \rightarrow \infty$), qui va faire l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 2

Modèle de Dicke

Le modèle de Dicke, introduit pour la première fois par R.H. Dicke en 1954 [46] décrit l'interaction dipolaire électrique d'un ensemble d'atomes, modélisés par des systèmes à deux niveaux, avec un champ électromagnétique. Le traitement semi-classique réalisé par Dicke met en évidence un phénomène très intéressant : la "superradiance", qui a été l'objet de nombreux travaux autant du point de vue théorique [21, 114, 7, 65, 16, 86] qu'expérimental [124, 64, 78, 40, 123, 11, 120, 130]. Ce phénomène est caractérisé par l'émission de la part de N_{at} atomes identiques d'un rayonnement à un taux proportionnel à N_{at}^2 , plutôt qu'à un taux proportionnel à N_{at} auquel on peut s'attendre lorsqu'on considère chaque atome comme indépendant des autres. Ceci résulte d'un comportement collectif de la part des atomes, dû à leur caractère quantique : ils interagissent tous avec le même champ électromagnétique et sont par conséquent indiscernables. Puis, en 1973 Klaus Hepp et Elliott Lieb [72, 71] s'intéressent pour la première fois au calcul de la fonction de partition associée au modèle introduit par Dicke et mettent en évidence le phénomène de "transition de phase superradiante". En deçà d'une certaine température critique T_c et pour un couplage lumière-matière supérieur à une certaine valeur critique g_c le système se trouve dans un état appelé "phase superradiante" caractérisé par des cohérences photoniques et atomiques non nulles au sein du système. La même année, Wang et Hioe [138] retrouvent les mêmes résultats que Hepp et Lieb, de manière plus claire et plus intuitive. Cependant, ces deux calculs de la fonction de partition sont opérés en négligeant les termes anti-résonnants au sein du terme d'interaction dipolaire électrique. Or, ces termes modifient quantitativement cette transition de phase ce qui a pour la première fois été mis en évidence par Carmichael Gardiner et Walls [31] : le couplage critique g_c est en réalité deux fois plus faible que celui prédit par Hepp et

Lieb. Suite aux travaux concernant la transition de phase classique, Emary et Brandes [53, 54] ont en 2003 proposé une nouvelle analyse exhaustive de cette transition de phase à température nulle ($T = 0$, i.e. la transition de phase quantique associée à ce modèle) basée sur l'introduction de la transformation de Holstein-Primakoff [82]. Leurs travaux ont montré que l'état fondamental du système peut posséder des cohérences atomiques et photoniques non nulles en phase superradiante et ont également mis en évidence l'apparition d'un comportement chaotique du système au voisinage du point critique, auquel nous ne nous intéresserons pas dans cette thèse. Ces dernières années ont vues apparaître de nombreuses généralisations de ce modèle notamment hors équilibre (modèle de Dicke dissipatif forcé ou "driven dissipative Dicke model") [47, 99, 126, 18], ou tirant parti du caractère particulier des circuits supraconducteurs qui se prêtent particulièrement bien au régime ultrafort [104, 103] tout en offrant de manière remarquable la possibilité d'avoir deux types de couplages (inductif et/ou capacitif) donnant lieu à de nouveaux régimes très intéressants [102, 9].

2.1 Hamiltonien de Dicke

Le "modèle de Dicke" est une généralisation du modèle de Rabi au cas multi atomes et décrit donc l'interaction de N_{at} pseudospins (systèmes à deux niveaux) avec un champ bosonique (photons) sous approximation des grandes longueurs d'onde (taille de l'ensemble atomique \ll longueur d'onde de l'onde électromagnétique) qui suppose donc un couplage homogène. L'hamiltonien de ce modèle peut se mettre sous la forme suivante :

$$\hat{\mathcal{H}}_{Dicke}/\hbar = \omega_{cav}\hat{a}^\dagger\hat{a} + \omega_0 \sum_i \hat{s}_z^{(i)} + \frac{g}{\sqrt{N_{at}}} \sum_i (\hat{s}_+^{(i)} + \hat{s}_-^{(i)})(\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad (2.1)$$

avec $\hat{s}_z^{(i)} = \hat{\sigma}_z^{(i)}/2$ et $\hat{s}_\pm^{(i)} = \hat{\sigma}_\pm^{(i)}$ les matrices représentatives de l'algèbre des spins 1/2 et g n'est plus cette fois-ci le couplage d'un système à deux niveaux au champ bosonique mais plutôt le couplage collectif (le couplage à un atome étant $g/\sqrt{N_{at}}$). Comme tous les pseudospins sont couplés avec la même amplitude au champ bosonique, il est commode d'introduire les opérateurs de spins collectifs $\hat{J}_z = \sum_i \hat{s}_z^{(i)}$ et $\hat{J}_\pm = \sum_i \hat{s}_\pm^{(i)}$ qui représente cette fois-ci un spin de taille $N_{at}/2$, ce qui nous permet de réécrire l'hamiltonien de Dicke

sous une forme plus compacte :

$$\hat{\mathcal{H}}_{Dicke}/\hbar = \omega_{cav} \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_0 \hat{J}_z + \frac{g}{\sqrt{N_{at}}} (\hat{J}_+ + \hat{J}_-) (\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad (2.2)$$

et met en évidence le comportement collectif des atomes qui se comportent comme un spin de taille $N_{at}/2$. Cette nouvelle notation est bien plus commode à la fois d'un point de vue numérique, car nous venons de passer d'un espace de Hilbert de taille $2^{N_{at}}$ pour l'ensemble de pseudo spins $1/2$ à une espace de Hilbert de taille N_{at} pour le spin collectif de taille $N_{at}/2$; mais également d'un point de vue analytique notamment lorsque nous nous intéresserons à la limite thermodynamique ($N_{at} \rightarrow \infty$).

Ce modèle possède une symétrie intéressante : la symétrie de parité (également appelée \mathbb{Z}_2) décrite par l'action de l'opérateur $\hat{\Pi} = \exp \{i\pi(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{J}_z + N_{at}/2)\}$, cet opérateur a pour valeurs propres ± 1 selon que le nombre d'excitations ($\hat{N}_{exc} = \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{J}_z + N_{at}/2$) est paire ou impaire. Déterminons l'action de cet opérateur de symétrie sur les opérateurs qui composent $\hat{\mathcal{H}}_{Dicke}$, en nous servant des identités $\hat{a}f(\hat{a}^\dagger \hat{a}) = f(\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1)\hat{a}$ et $f(\hat{J}_z)\hat{J}_+ = \hat{J}_+f(\hat{J}_z + 1)$:

$$\hat{\Pi}^\dagger (\hat{a}, \hat{a}^\dagger, \hat{J}_+, \hat{J}_-) \hat{\Pi} = (-\hat{a}, -\hat{a}^\dagger, -\hat{J}_+, -\hat{J}_-), \quad (2.3)$$

de plus il est relativement évident que cette transformation laisse \hat{J}_z et $\hat{a}^\dagger \hat{a}$ invariants. Nous voyons donc que $\hat{\Pi}^\dagger \hat{\mathcal{H}}_{Dicke} \hat{\Pi} = \hat{\mathcal{H}}_{Dicke}$ (ou sous une autre forme $[\hat{\mathcal{H}}_{Dicke}, \hat{\Pi}] = 0$) et que par conséquent, les états propres de l'Hamiltonien de Dicke auront une parité bien définie. Il sera donc possible de les séparer en deux classes : les états paires (nombre d'excitations paire, valeur propre 1) et impaires (nombre d'excitations impaire, valeur propre -1).

2.2 La limite thermodynamique ($N_{at} \rightarrow \infty$) : transition de phase associée au modèle de Dicke.

2.2.1 Transition de phase classique

Nous allons faire un synthèse des résultats obtenus par Hepp et Lieb [72, 71], Wang et Hioe [138] ainsi que Carmichael, Gardiner et Walls [31] dans le cas de la transition de phase classique. Leur méthode a consisté à calculer la fonction de partition associée à l'Hamiltonien de Dicke en utilisant une base d'états cohérents pour la partie photonique

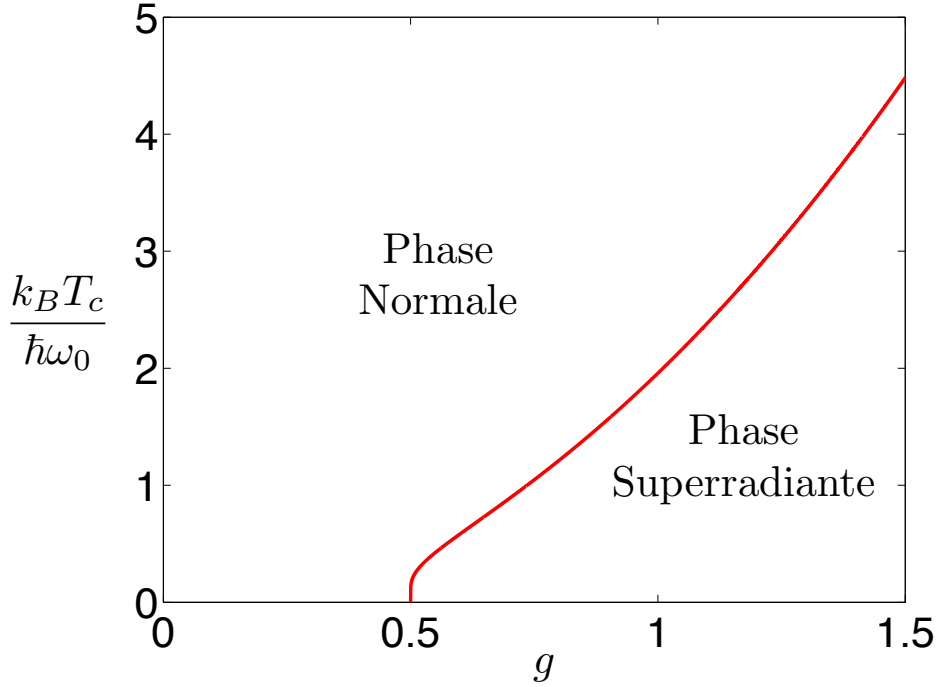


FIGURE 2.1 – Diagramme de phase du modèle de Dicke classique, obtenu à partir de l'équation (2.6).

et une base de spins 1/2 pour la partie atomique :

$$\mathcal{Z} = \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \sum_{s_1=\pm 1/2} \dots \sum_{s_{N_{at}}=\pm 1/2} \langle s_1, \dots, s_{N_{at}} | \langle \alpha | e^{-\beta \mathcal{H}_{Dicke}} | \alpha \rangle | s_1, \dots, s_{N_{at}} \rangle \quad (2.4)$$

Puis après avoir développé en série l'exponentielle et utilisé la méthode du col pour déterminer la valeur de l'intégrale, ils ont obtenu une équation de champ moyen très semblable à celle du modèle de Curie Weiss par exemple :

$$\frac{\omega_0 \omega}{4g^2} \eta(\alpha) = \tanh \left(\beta \frac{\hbar \omega_0}{2} \eta(\alpha) \right) \quad (2.5)$$

avec $\eta(\alpha) = \sqrt{1 + (8g^2/\omega_0^2)\alpha^2}$. Grâce à cette équation il est possible de dégager des comportements intéressants : en effet $1 \leq \eta(\alpha) \leq +\infty$, ce qui implique que si $\omega_0 \omega / 4g^2 \geq 1$ l'équation (2.4) ne possède pas de solution car $\tanh(k) \leq \tanh(kz) \leq 1$ pour $z \in [1, +\infty[$. Ainsi, pour avoir une cohérence photonique non nulle il faut au moins que les deux courbes se touchent en un point. Nous en déduisons qu'il faut que leurs valeurs en $\eta = 1$ soit au

moins égale, ce qui nous fixe la température critique : $\frac{\omega_0 \omega}{4g^2} = \tanh(\beta_c \frac{\omega_0}{2})$. Grâce à cette expression nous pouvons déduire l'équation de la frontière entre les phases superradiante ($\alpha \neq 0$) et normale ($\alpha = 0$) dans le plan (T, g) :

$$T_c = \frac{\hbar \omega_0}{2k_B} \frac{1}{\tanh^{-1}(\frac{\omega \omega_0}{4g^2})}, \quad (2.6)$$

grâce à laquelle nous pouvons déterminer le diagramme de phase du modèle (cf. fig. 2.1). Nous voyons donc que contrairement à d'autres catégories de transition de phase [118], la transition de phase superradiante a lieu même à température non nulle.

2.2.2 Etude de la transition de phase quantique (à $T = 0$)

Nous allons reprendre les principaux résultats de la méthode d'Emary et Brandes [53, 54] en limite thermodynamique ($N_{at} \rightarrow \infty$), puis montrer quelles informations cette limite asymptotique nous apporte concernant le comportement du système à taille fini.

Etude de l'énergie de l'état fondamental en champ moyen

Afin de faire apparaître le comportement critique du modèle de Dicke il est nécessaire de considérer la limite thermodynamique ($N_{at} \rightarrow \infty$) car comme nous le verrons dans la section suivante, en taille finie, le caractère critique disparaît pour laisser place à un comportement plus régulier. L'approche de champ moyen se prête bien à l'étude de ce modèle et est exacte en limite thermodynamique. En effet, du point de vue des spins, ce modèle est équivalent au (appartient à la même classe d'universalité que le) modèle d'Ising avec interaction longue portée [115, 132] (également appelé modèle d'Ising totalement connecté ou modèle de Lipkin-Meshkov-Glick [93, 96, 62]) dans lequel chaque spin interagit avec tous les autres avec une amplitude égale. Il est alors facile de comprendre pourquoi le traitement en champ moyen est exacte en limite thermodynamique : ce traitement est habituellement d'autant plus approprié que le nombre de plus proches voisins est important (dans les modèles à interaction courte portée il est typiquement égale à 2 en 1 dimension, 4 en 2 dimensions et 6 en 3 dimensions), car plus ceux-ci sont nombreux, plus les fluctuations sur site sont faibles [23, 22] (et modifient par conséquent faiblement le comportement). Or, dans le cadre du modèle d'Ising totalement connecté, le nombre de plus proches voisins est égale au nombre de spins N_{at} , donc lorsque N_{at} augmente, le nombre de plus proches voisins augmente également et est même infini en limite thermodynamique ne laissant pas la possibilité aux spins de fluctuer.

Afin d'étudier le comportement du modèle en limite thermodynamique, il convient de transformer quelque peu l'Hamiltonien (2.2) en lui appliquant une transformation de Holstein-Primakoff [82] qui consiste à exprimer les opérateurs de spins (\hat{J}_z , \hat{J}_+ et \hat{J}_-) en terme d'un opérateur bosonique (noté \hat{b}), ce qui sera mieux adapté à l'étude de la limite thermodynamique. Les opérateurs de spins se transforment de la manière suivante :

$$J_z = \hat{b}^\dagger \hat{b} - \frac{N_{at}}{2} \quad , \quad J_+ = \hat{b}^\dagger \sqrt{N_{at} - \hat{b}^\dagger \hat{b}} \quad , \quad J_- = \sqrt{N_{at} - \hat{b}^\dagger \hat{b}} \hat{b}. \quad (2.7)$$

En introduisant ces expressions dans l'Hamiltonien de Dicke, il vient :

$$\hat{\mathcal{H}}_{Dicke}/\hbar = \omega_{cav} \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_0 (\hat{b}^\dagger \hat{b} - \frac{N_{at}}{2}) + \frac{g}{\sqrt{N_{at}}} (\hat{b}^\dagger \sqrt{N_{at} - \hat{b}^\dagger \hat{b}} + \sqrt{N_{at} - \hat{b}^\dagger \hat{b}} \hat{b}) (\hat{a} + \hat{a}^\dagger). \quad (2.8)$$

L'approche en champ moyen consiste à effectuer un développement de cet Hamiltonien autour des valeurs moyennes des champs \hat{a} et \hat{b} qui correspondent à des minimums de l'énergie de l'état fondamental. Pour cela nous allons remplacer les opérateurs \hat{a} et \hat{b} par leur valeur moyenne plus des fluctuations au tour de cette valeur moyenne ($\hat{a} \rightarrow \alpha + \hat{c}$ et $\hat{b} \rightarrow \beta + \hat{d}$ avec $\alpha = \langle \hat{a} \rangle \propto \sqrt{N_{at}}$ et $\beta = \langle \hat{b} \rangle \propto \sqrt{N_{at}}$) au sein de l'Hamiltonien (2.8) et effectuer un développement limité de celui-ci en terme des opérateurs de fluctuation du type :

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_{Dicke} &= \hat{\mathcal{H}}_{Dicke}^{(0)}(\alpha, \beta) + \left(\frac{\partial \hat{\mathcal{H}}_{Dicke}}{\partial \delta \hat{a}} \right)_{\delta \hat{a}, \delta \hat{b}, \delta \hat{a}^\dagger, \delta \hat{b}^\dagger = 0} \delta \hat{a} + \left(\frac{\partial \hat{\mathcal{H}}_{Dicke}}{\partial \delta \hat{b}} \right)_{\delta \hat{a}, \delta \hat{b}, \delta \hat{a}^\dagger, \delta \hat{b}^\dagger = 0} \delta \hat{b} + \dots \\ &= \hat{\mathcal{H}}_{Dicke}^{(0)}(\alpha, \beta) + \hat{\mathcal{H}}_{Dicke}^{(1)}(\alpha, \beta, \delta \hat{a}, \delta \hat{b}, h.c.) + \hat{\mathcal{H}}_{Dicke}^{(2)}(\alpha, \beta, \delta \hat{a} \delta \hat{b}, \delta \hat{a}^\dagger \delta \hat{a}, \dots) + \dots \end{aligned} \quad (2.9)$$

Ainsi, à l'ordre 0, nous obtiendrons la valeur moyenne de l'Hamiltonien en champ moyen :

$$\hat{\mathcal{H}}_{Dicke}^{(0)}/\hbar = \omega |\alpha|^2 + \omega_0 (|\beta|^2 - \frac{N_{at}}{2}) + g \sqrt{1 - \frac{|\beta|^2}{N_{at}}} (\beta + \beta^*) (\alpha + \alpha^*). \quad (2.10)$$

L'état fondamental du système est bien sûr celui qui minimise cette énergie en fonction de la valeur moyenne des champs ($\partial \hat{\mathcal{H}}_{Dicke}^{(0)}/\partial x = 0$, $x = \alpha, \alpha^*, \beta, \beta^*$). Commençons par

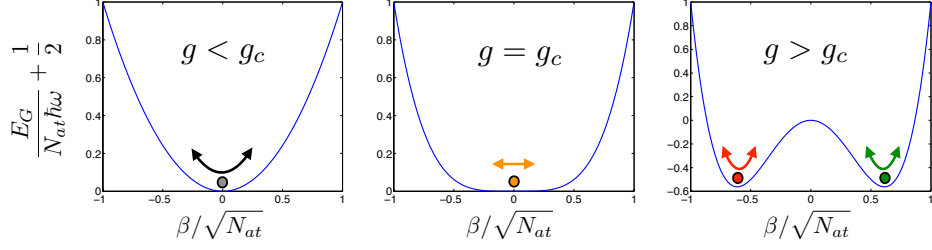


FIGURE 2.2 – Énergie de l'état fondamental en champ moyen en fonction de β pour différentes valeurs du couplage lumière-matière g , à résonance ($\omega = \omega_0$) (en unité de $N_{at}\hbar\omega$).

minimiser cette énergie par rapport à α et α^* :

$$\begin{cases} \frac{1}{\hbar} \frac{\partial \hat{\mathcal{H}}_{Dicke}^{(0)}}{\partial \alpha} = \omega \alpha^* + g \sqrt{1 - \frac{|\beta|^2}{N_{at}}} (\beta + \beta^*) = 0 \\ \frac{1}{\hbar} \frac{\partial \hat{\mathcal{H}}_{Dicke}^{(0)}}{\partial \alpha^*} = \omega \alpha + g \sqrt{1 - \frac{|\beta|^2}{N_{at}}} (\beta + \beta^*) = 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

Nous remarquons immédiatement aux vues de la forme de ces équations que α sera forcément réel, si nous avons écrit les équations pour β nous en aurions également déduit que β est réel. Donc en réalité la fonction à minimiser est :

$$\hat{\mathcal{H}}_{Dicke}^{(0)} / \hbar = \omega \alpha^2 + \omega_0 \left(\beta^2 - \frac{N_{at}}{2} \right) + 4g \sqrt{1 - \frac{\beta^2}{N_{at}}} \beta \alpha, \quad (2.12)$$

qui est concave en terme de la variable α ($\partial^2 \hat{\mathcal{H}}_{Dicke}^{(0)} / \partial \alpha^2 = \omega > 0$). En nous servant des équations (2.11) nous obtenons une expression de α en fonction de β ($\alpha = -(2g/\omega)\beta\sqrt{1 - \beta^2/N_{at}}$) qui une fois réintroduite dans (2.10) nous donne :

$$\hat{\mathcal{H}}_{Dicke}^{(0)} / \hbar = \left(\omega_0 - 4\frac{g^2}{\omega} \right) \beta^2 + 4\frac{g^2}{\omega N_{at}} \beta^4 - \omega_0 \frac{N_{at}}{2}. \quad (2.13)$$

Nous voyons ainsi apparaître une énergie du fondamental de la forme $a\beta^2 + b\beta^4$ qui est caractéristique des transitions de phase d'ordre 2. Cette fonction possède un minima unique en $\beta = 0$ lorsque $a > 0$ et deux minima lorsque $a < 0$ (cf. fig. 2.2). Ainsi, le couplage critique de cette transition de phase est le couplage pour lequel $\omega_0 - 4g_c^2/\omega = 0$ soit encore $g_c = \sqrt{\omega\omega_0}/2$. Une fois ce couplage critique atteint, la lumière et la matière acquièrent une cohérence non nulle dont les expressions sont les suivantes (en ayant posé

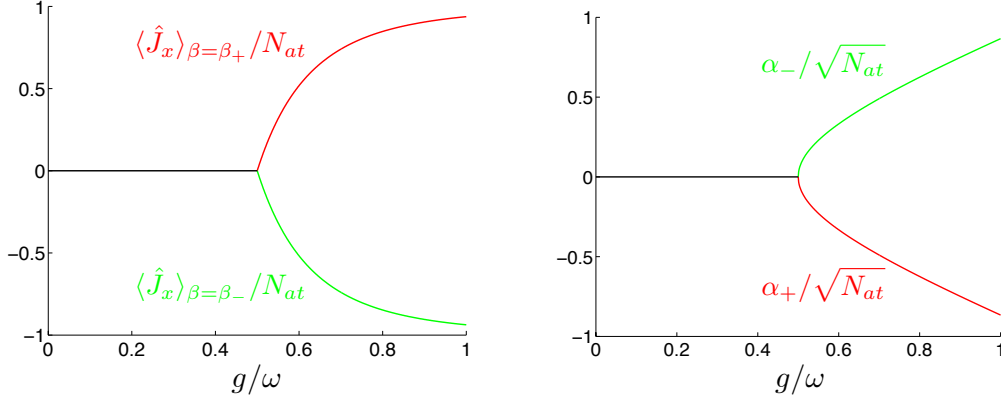


FIGURE 2.3 – Valeur moyenne de l'opérateur \hat{J}_x/N_{at} (à gauche) et valeur moyenne de l'opérateur $\hat{a}/\sqrt{N_{at}}$ (à droite) en fonction du couplage lumière-matière normalisé (g/ω), à résonance ($\omega = \omega_0$). Nous voyons qu'à partir du couplage critique, les atomes commencent à s'aligner suivant la direction x ($\langle \hat{J}_x \rangle \neq 0$) et le système commence à développer des cohérences photonique ($\alpha \neq 0$) et atomique ($\beta \neq 0$). Les deux courbes (verte et rouge) correspondent aux deux solutions des équations de champ moyen qui brisent la symétrie de parité.

$\mu = \omega\omega_0/4g^2$) :

$$\alpha_{\pm} = \mp \frac{g}{\omega} \sqrt{N_{at}} \sqrt{1 - \mu^2}, \quad (2.14)$$

$$\beta_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{N_{at}}{2}} \sqrt{1 - \mu}. \quad (2.15)$$

Ces cohérences ont été tracées à résonance ($\omega = \omega_0$) sur la figure 2.3. Nous pouvons remarquer une propriété intéressante : $\alpha_{\pm}/\sqrt{N_{at}} \xrightarrow{N_{at} \rightarrow \infty} \infty$ tandis que $\beta_{\pm}/\sqrt{N_{at}} \xrightarrow{N_{at} \rightarrow \infty} \pm\sqrt{1/2}$. Ce qui nous montre que la population du niveau excité des systèmes à deux niveaux converge vers une valeur limite telle que tous les spins soient alignés dans la direction x . En effet :

$$\langle \hat{J}_x \rangle = \frac{\langle \hat{J}_+ \rangle + \langle \hat{J}_- \rangle}{2} = \frac{N_{at}}{2} \sqrt{1 - \mu^2} \xrightarrow{N_{at} \rightarrow \infty} \pm \frac{N_{at}}{2}. \quad (2.16)$$

Il apparait donc au sein du système un champ électrique ($\langle \hat{a} \rangle = \alpha$ est réelle) de valeur moyenne non nulle accompagné par une polarisation de la matière dans la direction x . Il est intéressant de noter que les valeurs moyennes du champ électromagnétique et la somme des dipôles électriques ont des signes opposés ($\langle \hat{a} \rangle = -2(g/\omega)\langle \hat{J}_x \rangle$). Le

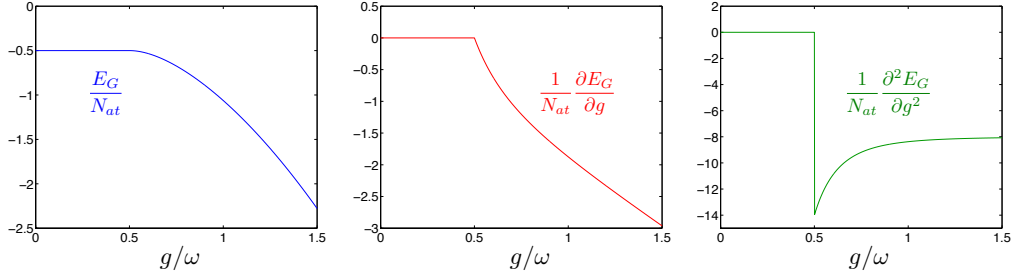


FIGURE 2.4 – Energie du fondamental (gauche), ainsi que sa dérivée première (milieu) et seconde (droite), en unité de $\hbar\omega$, en fonction du couplage lumière-matière normalisé (g/ω). La dérivée seconde présente une discontinuité caractéristique d’une transition de phase du deuxième ordre.

fait qu’il existe deux couples de solutions (α_+, β_+) et (α_-, β_-) est la conséquence de la brisure spontanée de symétrie \mathbb{Z}_2 et implique qu’en limite thermodynamique, il existe deux fondamentaux dégénérés ($|G_{\pm}\rangle = |\alpha_{\pm}\rangle |\beta_{\pm}\rangle$) qui correspondent aux deux minima du potentiel de la figure 2.2. La solution $\alpha = 0, \beta = 0$ n’est pas stable en phase superradiante ($g > g_c$) comme nous pouvons le voir sur le potentiel de la figure 2.2 car en $\beta = 0$ le minimum local pour $g < g_c$ s’est transformé en maximum local pour $g > g_c$ ce qui signifie que la moindre perturbation extérieure va faire tomber le système dans le minima de gauche (α_-, β_-) ou le minima de droite (α_+, β_+) . L’énergie de l’état fondamental en champ moyen dans les phases superradiante (SR) et normale (N) est alors :

$$\begin{aligned} E_G^{(N)}/\hbar &= -\frac{\omega_0}{2} N_{at} \\ E_G^{(SR)}/\hbar &= -N_{at} \left(\frac{4g^2}{\omega} + \frac{\omega\omega_0^2}{4g^2} \right) \end{aligned} \quad (2.17)$$

ces énergies ainsi que leurs dérivées première et seconde ont été tracées sur la figure 2.4 sur laquelle nous pouvons remarquer que la dérivée première n’est pas discontinue au point critique, tandis que la dérivée seconde l’est. Ceci assure que la transition de phase est d’ordre 2. De plus, nous remarquons que l’énergie de l’état fondamental est plus faible en phase superradiante qu’en phase normale : l’apparition de photons dans le fondamental est énergétiquement favorable, ce qui est lié à l’apparition des deux fondamentaux dégénérés dont il a déjà été question.

Diagonalisation de l'Hamiltonien de Dicke en limite thermodynamique : polaritons et spectre des excitations.

Pour déterminer le spectre des excitations il faut considérer l'ordre 2 du développement limité de l'Hamiltonien (2.9) en terme des opérateurs fluctuations au voisinage des deux minimas (le 1er ordre est nul, car nous nous sommes placés au voisinage des minimums de l'énergie du fondamental), puis diagonaliser cet Hamiltonien quadratique, à l'aide par exemple de la méthode dite de Hopfield-Bogoliubov ou encore en revenant à une représentation position-impulsion des opérateurs de fluctuations comme l'ont fait C. Emary et T. Brandes [53]. Nous choisirons ici la méthode de Hopfield-Bogoliubov [75] que nous allons détailler plus loin. Les termes d'ordre supérieur à deux sont nuls en limite thermodynamique : l'ordre 0 est proportionnel à N_{at} , l'ordre 1 à $\sqrt{N_{at}}$ et l'ordre 2 à 1, les ordres suivants seront proportionnels à des puissances négatives du nombre d'atomes et seront donc nuls en limite thermodynamique. L'expression des Hamiltoniens effectifs en phases Normale (N) et superradiante (SR) sera alors la suivante :

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}}_N^{(2)}/\hbar &= \omega \hat{c}^\dagger \hat{c} + \omega_0 \hat{d}^\dagger \hat{d} + g(\hat{c} + \hat{c}^\dagger)(\hat{d} + \hat{d}^\dagger), \\ \hat{\mathcal{H}}_{SR}^{(2)}/\hbar &= \omega \hat{c}^\dagger \hat{c} + \frac{\omega_0}{2\mu}(1 + \mu)\hat{d}^\dagger \hat{d} + \omega_0 \frac{(1 - \mu)(3 + \mu)}{8\mu(1 + \mu)}(\hat{d} + \hat{d}^\dagger)^2 \\ &\quad + \mu \sqrt{\frac{\omega\omega_0}{2\mu(1 + \mu)}}(\hat{c} + \hat{c}^\dagger)(\hat{d} + \hat{d}^\dagger).\end{aligned}\tag{2.18}$$

Comme ces Hamiltoniens sont quadratiques en terme des opérateurs $\hat{c}, \hat{c}^\dagger, \hat{d}, \hat{d}^\dagger$, ils peuvent être diagonalisés exactement. Nous allons chercher les modes propres de ceux-ci sous la forme d'une combinaison linéaire des opérateurs précédents ($\hat{p} = t\hat{c} + u\hat{d} + v\hat{c}^\dagger + w\hat{d}^\dagger$). Par définition un mode propre doit être tel que $[\hat{p}, \hat{\mathcal{H}}] = \epsilon\hat{p}$, ce qui peut également s'exprimer sous la forme suivante :

$$t [\hat{c}, \hat{\mathcal{H}}] + u [\hat{d}, \hat{\mathcal{H}}] + v [\hat{c}^\dagger, \hat{\mathcal{H}}] + w [\hat{d}^\dagger, \hat{\mathcal{H}}] = \epsilon(t\hat{c} + u\hat{d} + v\hat{c}^\dagger + w\hat{d}^\dagger)\tag{2.19}$$

Puis, en factorisant par $\hat{c}, \hat{c}^\dagger, \hat{d}, \hat{d}^\dagger$, nous pouvons mettre cette équation sous forme matricielle dans les deux phases :

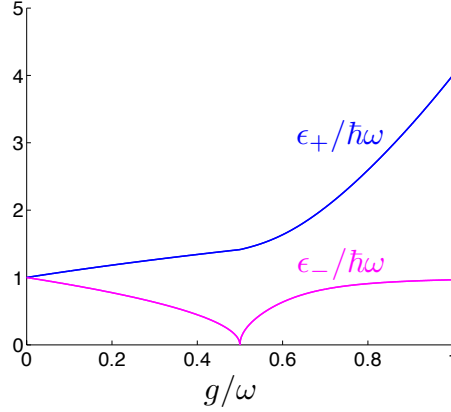


FIGURE 2.5 – Spectre des excitations du modèle de Dicke à résonance ($\omega = \omega_0$) en fonction du couplage normalisé lumière-matière. L'excitation polaritonique basse est nulle au point critique qui correspond à un point de non analytité.

$$\begin{pmatrix} \omega & \tilde{g} & 0 & -\tilde{g} \\ \tilde{g} & \tilde{\omega}_0 & -\tilde{g} & -2\tilde{\kappa} \\ 0 & \tilde{g} & -\omega & -\tilde{g} \\ \tilde{g} & 2\tilde{\kappa} & -\tilde{g} & -\tilde{\omega}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \frac{\epsilon}{\hbar} \begin{pmatrix} t \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

avec $(\tilde{\omega}_0, \tilde{g}, \tilde{\kappa}) = (\frac{\omega_0}{4\mu} \frac{4+(1+\mu)^2}{1+\mu}, g\mu\sqrt{\frac{2}{1+\mu}}, \frac{\omega_0}{4\mu} \frac{(1-\mu)(3+\mu)}{1+\mu})$. En faisant cela, nous obtenons les modes propres de L'Hamiltonien en phase Normale (i. e. dans laquelle les cohérences atomiques et photoniques sont nulles) :

$$\left(\frac{\epsilon_{\pm}^{(N)}}{\hbar} \right)^2 = \frac{\omega^2 + \omega_0^2 \pm \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 16g^2\omega\omega_0}}{2}, \quad (2.21)$$

ainsi qu'en phase superradiante (i.e. au voisinage des minimas de $E_G(\alpha, \beta)$) :

$$\left(\frac{\epsilon_{\pm}^{(SR)}}{\hbar} \right)^2 = \frac{\omega^2 + (\omega_0/\mu)^2 \pm \sqrt{(\omega^2 - (\omega_0/\mu)^2)^2 + 4\omega^2\omega_0^2}}{2}. \quad (2.22)$$

Ces modes propres ont été tracés sur la figure 2.5, et nous remarquons un fait tout

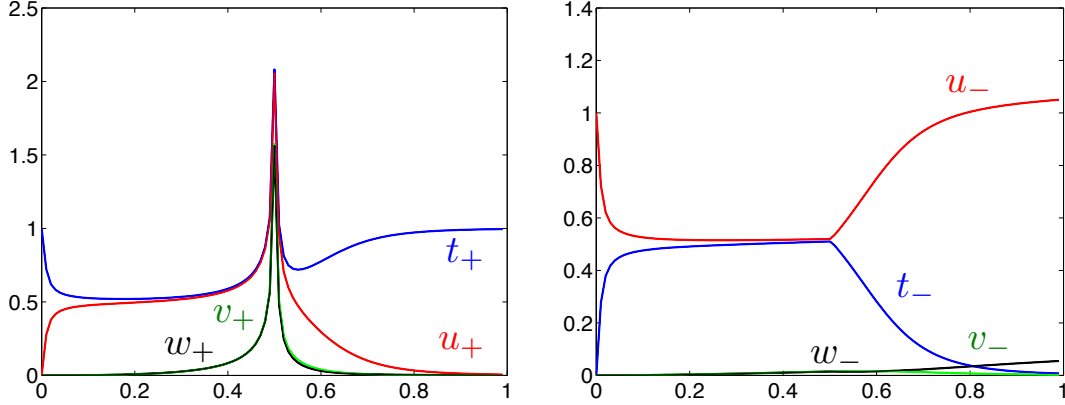


FIGURE 2.6 – Coefficients de la transformation de Hopfield-Bogoliubov en fonction du couplage lumière matière normalisé (g/ω), avec $\omega_0 = 1.01\omega$.

à fait intéressant : la branche polaritonique basse (ϵ_-) s'annule au couplage critique. En d'autres termes, au point critique, le gap entre l'énergie d'excitation (ϵ_-) et l'état fondamental est nul. Ce comportement est tout à fait caractéristique d'une brisure spontanée de symétrie discrète (dans notre cas la symétrie de parité $\hat{\Pi}$) associée à une transition de phase d'ordre 2 [118]. En effet, essayons de comprendre ce qu'il se passe en regardant la figure 2.2 : nous voyons qu'au point critique l'énergie en champ moyen de l'état fondamental possède une courbure nulle au voisinage du point de stabilité $\alpha = 0$; or l'énergie d'excitation est proportionnelle à la courbure de l'énergie en champ moyen au voisinage du minima (ce qui est apparent aux vues du développement limité (2.9)), ce qui signifie que si cette courbure est nulle, l'énergie d'excitation l'est également. Ainsi, au voisinage des minima, en limite thermodynamique, L'Hamiltonien de Dicke est donc décrit de manière effective par les Hamiltoniens suivants :

$$\mathcal{H}_{Dicke}^{(i)}/\hbar = \omega_+^{(i)} \hat{p}_{i,+}^\dagger \hat{p}_{i,+} + \omega_-^{(i)} \hat{p}_{i,-}^\dagger \hat{p}_{i,-} + E_G^{(i)}, \quad (2.23)$$

avec $i = N$ pour $g \leq g_c$ et $i = SR$ pour $g > g_c$. L'expression de l'énergie en champ moyen de l'état fondamental dans les deux phases étant donnée par l'équation (2.17).

Il est également intéressant de regarder la valeur des coefficients $t_\pm, u_\pm, v_\pm, w_\pm$ en fonction du couplage lumière-matière qui nous renseignent sur le caractère photonique ou atomique des excitations. Ces quantités ont été tracées sur la figure 2.6 (hors résonance) et nous remarquons qu'à couplage nulle, la nature des excitations est bien définie : il y a

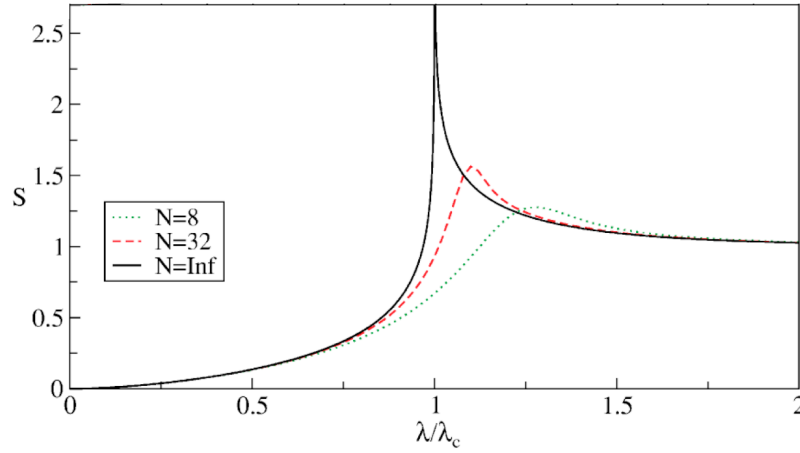


FIGURE 2.7 – Entropie d'intrication, en limite thermodynamique (courbe noire) ainsi qu'en taille finie (courbes rouge et verte) en fonction de λ/λ_c , qui correspond à g/g_c dans notre cas, à résonance ($\omega = \omega_0$) (figure extraite de [89]).

bien séparation des excitations lumière et matière (ici comme $\omega_0 > \omega$, la branche haute correspond aux excitations atomiques et la branche basse aux excitations photoniques). Cependant, lorsque le couplage est plus important, nous voyons que la nature des excitations n'est plus définie : les excitations sont un mélange de lumière et de matière également appelés "polaritons". Nous voyons donc que la lumière et la matière s'intriquent de plus en plus fortement à mesure que l'on approche du point critique. Afin d'avoir une idée plus précise de ce degré d'intrication entre la lumière et la matière, il convient alors de s'intéresser à l'entropie d'intrication de ce modèle.

Entropie d'intrication lumière-matière.

L'entropie d'intrication est une propriété purement quantique n'ayant pas d'analogue classique : elle décrit le degré d'intrication au sein d'un système entre deux de ses sous-parties. Ainsi, pour un état pur, l'entropie d'intrication est nulle, tandis que pour un état intriqué elle ne l'est pas. En effet, l'entropie d'intrication est définie comme suit : si le système que nous considérons peut être séparé en deux sous systèmes A et B, l'état global du système étant un état pur $|\Psi\rangle$, nous pouvons définir la matrice densité du système global comme $\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$. A partir de la matrice densité totale, nous pouvons également définir les matrices densité réduites des sous systèmes A et B par : $\rho_i = \text{Tr}_i(\rho)$, $i = A, B$ (avec Tr_i la trace partielle sur le sous espace i). Alors, l'entropie d'intrication

entre les sous-systèmes A et B est définie par :

$$S_{AB} = -Tr_A[\rho_A \log_2(\rho_A)] = -Tr_B[\rho_B \log_2(\rho_B)] \quad (2.24)$$

Plus particulièrement, dans une base qui diagonalise la matrice densité réduite (base dans laquelle $\rho_j = \sum_i p_i^{(j)} |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$, $i = A, B$), on a :

$$S_{AB} = - \sum_i p_i^{(A)} \log_2 p_i^{(A)} = - \sum_i p_i^{(B)} \log_2 p_i^{(B)} \quad (2.25)$$

Ainsi, nous voyons qu'il existe deux cas limites :

- i) l'état du système est un état factorisé (donc sans aucune intrication entre A et B) du type $|\Psi\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\phi_B\rangle$ auquel cas les matrices densités réduites représenteront des états pures et $S_{AB} = 0$.
- ii) tous les états qui diagonalisent les matrices densité réduites ont la même population (pour un espace de Hilbert de taille $N = n \times n$, $p_i = 1/n$, $\forall i$) auquel cas l'entropie d'intrication est maximale et $S_{AB} = \ln(n)$ [3]. Si les dimensions d'espace sont différentes ($N = N_A \times N_B$), nous aurons $S_{AB} = \log_2(\min(N_A, N_B))$. Nous voyons donc que $0 \leq S_{AB} \leq \log_2(\min(N_A, N_B))$ et atteint son maximum pour un état maximalement intriqué et son minimum pour un état non intriqué, ce qui en fait une bonne mesure du taux d'intrication entre les sous parties d'un système.

Il est important de remarquer le caractère tout à fait particulier que l'entropie d'intrication a acquis dans l'étude des modèles critiques, exhibants une transition de phase : de nombreuses études ont démontré que cette quantité est très sensible à la présence du point critique ([133, 131, 3, 107]) dans le cadre de différents modèles de spins unidimensionnels (y compris celui de Dicke [132, 89, 88]) et diverge (en limite thermodynamique) au point critique comme $\alpha \log_2(\min(N_A, N_B))$ avec α un exposant critique caractéristique de la classe d'universalité à laquelle appartient le modèle (Ising, XY, BCS,...). Il a également été démontré que l'entropie d'intrication suit des lois universelles (du type loi des aires) dans des modèles de dimensionnalité plus élevée. Ces études montrent que l'entropie d'intrication est maximale au point critique ce qui implique que le système est maximalement intriqué en ce point et confère un caractère particulier à celui-ci autant d'un point de vue fondamental que d'un point de vue pratique en tant que ressource pour l'information quantique. Dans le cadre du modèle de Dicke, l'exposant critique α a pour la première fois été calculés par Lambert et al. [88, 89] en limite thermodynamique, puis par Vidal et al. en taille finie [132] pour l'entropie d'intrication

lumière-matière. Les résultats de Lambert et al. [88, 89, 132] ont été rapportés sur la figure 2.7. Nous voyons donc bien que l'entropie d'intrication diverge au point critique et il est possible de relier cette divergence à l'annulation de la branche d'excitations polaritoniques basse au point critique [88, 133], comme nous le verrons plus tard dans le cadre d'un autre modèle. Cette divergence n'a bien sûr plus lieu en taille finie car $\log_2(\min(N_A, N_B))$ est fini, cependant l'entropie d'intrication atteint son maximum en un point qui peut être considéré comme l'équivalent du point critique à taille finie. Ce fait est très intéressant et signale que même en taille finie l'état fondamental du système en phase superradiante est un état fortement intriqué. En effet comme nous allons le voir dans la suite, l'état fondamental du modèle de Dicke en limite de couplage ultra-fort est du type chat de Schrödinger ($|G\rangle = |+\dots+\rangle \otimes |-\alpha\rangle \pm |-\dots-\rangle \otimes |\alpha\rangle$) avec une forte intrication lumière-matière.

2.3 Propriétés de taille finie

2.3.1 Valeur moyenne des observables en taille finie.

2.3.2 La brisure spontanée de symétrie en taille finie.

La brisure spontanée de symétrie décrite dans le cas de la limite thermodynamique ne peut pas avoir lieu en taille finie en raison de l'absence de criticalité et de non analyticité dans les observables (qui ne peuvent apparaître qu'en limite thermodynamique). En effet, comme $[\hat{\mathcal{H}}_{Dicke}, \hat{\Pi}] = 0$, les  tats propres de \mathcal{H}_{Dicke} doivent également être  tats propres de l'opérateur parité $\hat{\Pi}$, par conséquent les paramètres d'ordre de la transition de phase ($\langle \hat{a} \rangle$ ou $\langle \hat{J}_x \rangle$) seront nuls. Cependant, le nombre moyen de photons $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$ ainsi que le nombre moyen d'excitations atomiques $\langle \hat{J}_z \rangle$ ne le seront pas (cf. fig. 2.8). De plus, même en taille finie, comme nous l'avons déjà vu, l'entropie d'intrication lumière-matière est non nulle en phase superradiante, ce qui laisse penser que l'état fondamental du système dans cette phase est un état fortement intriqué.

Il est possible de trouver une expression approchée de cet état en choisissant judicieusement un état variationnel approprié : nous avons vu qu'en limite thermodynamique l'état fondamental du système était un produit tensoriel entre un état cohérent pour la lumière et un état cohérent pour la matière. En remarquant que lorsque le nombre de spins $1/2$ tend vers l'infini, un état cohérent de spin (défini plus tard) tend vers un état cohérent [59], il semble alors judicieux de choisir un état cohérent de spin pour la matière

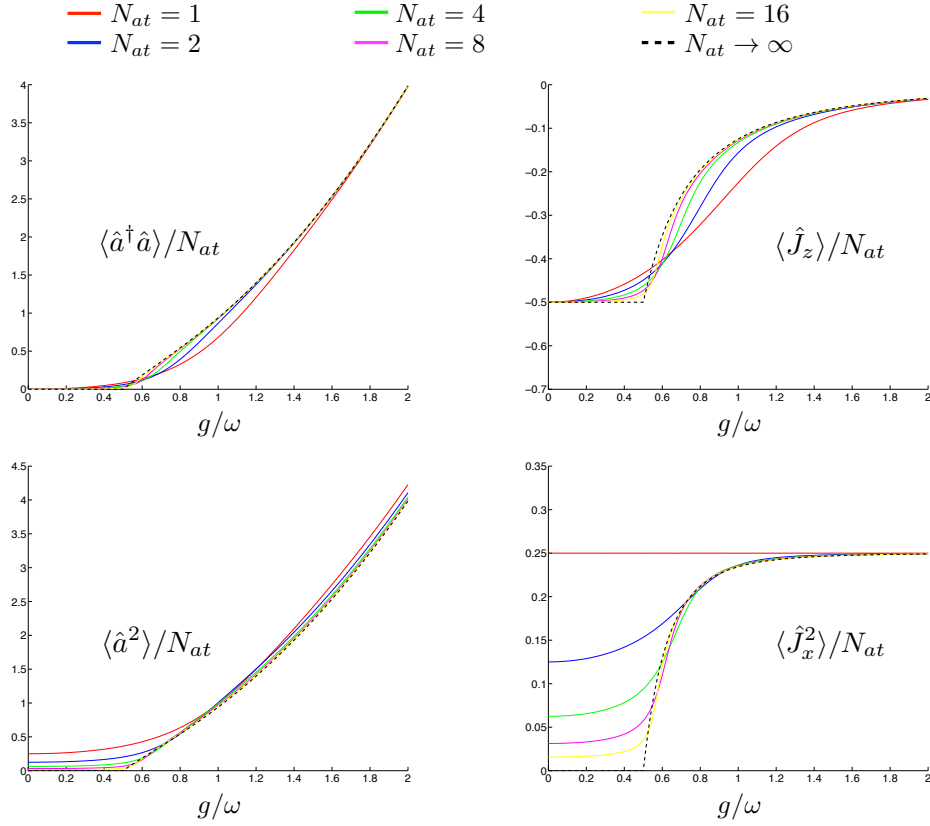
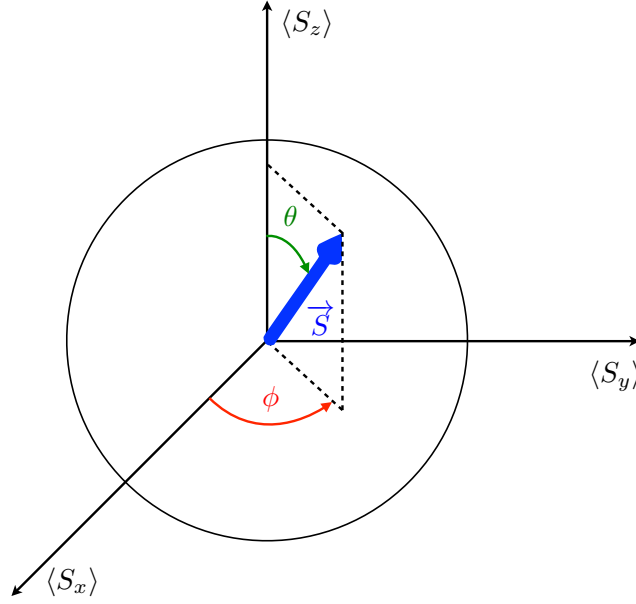


FIGURE 2.8 – Valeur moyenne du nombre de photons (en haut à gauche), du nombre d’excitations atomiques (en haut à droite), ainsi que des opérateurs \hat{J}_x^2 et \hat{a}^2 dans l’état fondamental. Nous remarquons que bien que les paramètres d’ordre ($\langle \hat{a} \rangle$ et $\langle \hat{J}_x \rangle$) soient nuls, le nombre moyen d’excitations atomiques et photoniques ne le sont pas dans l’état fondamental. De plus \hat{J}_x^2 et \hat{a}^2 n’étant pas nuls Cela signifie que bien qu’il n’y ait pas de cohérence en moyenne dans l’état fondamental, cette propriété fluctue beaucoup d’une expérience à l’autre.

et un état cohérent pour la partie lumière. Un état cohérent de cohérence $\alpha \in \mathbb{C}$ est, par définition, un état propre de l’opérateur d’annihilation ($\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle$) et possède l’expression suivante dans la base de Fock :

$$|\alpha\rangle = \exp(-|\alpha|^2/2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{\sqrt{k!}} |k\rangle = \exp(-|\alpha|^2/2) \exp(-\alpha \hat{a}^\dagger) |0\rangle. \quad (2.26)$$

Il possède par conséquent la propriété remarquable suivante :

FIGURE 2.9 – Représentation d'un état cohérent dans la base $\langle S_x \rangle$, $\langle S_y \rangle$, $\langle S_z \rangle$.

$$\langle \alpha | (\hat{a}^\dagger)^l \hat{a}^m | \alpha \rangle = (\alpha^*)^l \alpha^m \quad (2.27)$$

Un état cohérent de spin quant à lui est défini de manière à ce que la valeur moyenne des composantes de spins (\hat{S}_x , \hat{S}_y et \hat{S}_z) soit égale à la valeur qu'auraient ces observables si un spin classique était orienté dans la direction (θ, ϕ) (cf. fig 2.9) (i.e que cet état de spin est l'état quantique le plus proche d'un état de spin classique). Dans la base des états propres de l'opérateur S_z (tels que $\hat{S}_z |S, m\rangle = m |S, m\rangle$), l'expression d'un tel état sera :

$$\begin{aligned} |\theta, \phi\rangle &= \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{2S} \exp \left[\tan \left(\frac{\theta}{2} \right) e^{i\phi} \hat{S}_- \right] |S, S\rangle \\ &= \exp \left(-i\phi \hat{S}_z \right) \exp \left(-i\theta \hat{S}_y \right) |S, S\rangle \\ &= \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{2S} \sum_{m=0}^{2S} \sqrt{\binom{2S}{m}} \left(\tan \left(\frac{\theta}{2} \right) e^{i\phi} \right)^{-m} |S, m-S\rangle. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Il existe une expression équivalente à celles-ci qui ne fait intervenir qu'un nombre ($\eta = \exp(-i\phi)/\tan(\theta/2)$) et sera très utile par la suite :

$$|\theta, \phi\rangle = |\eta\rangle = \frac{1}{(1 + |\eta|^2)^S} \sum_{m=0}^{2S} \sqrt{\binom{2S}{m}} \eta^m |S, m - S\rangle. \quad (2.29)$$

Ces états possèdent les propriétés suivantes :

$$\langle\theta, \phi| (\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z) |\theta, \phi\rangle = S(\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta). \quad (2.30)$$

Après avoir passé en revue ces propriétés, nous pouvons chercher l'état fondamental sous la forme $|G\rangle = |\alpha\rangle \otimes |\theta, \phi\rangle$, ce qui nous donne pour l'énergie du fondamental :

$$E_G = \omega|\alpha|^2 + \omega_0 S \cos\theta + g\sqrt{2S} \cos\phi \sin\theta (\alpha + \alpha^*), \quad (2.31)$$

une première minimisation de cette énergie par rapport à α^* nous donne :

$$\alpha = -\frac{g}{\omega} \sqrt{2S} \cos\phi \sin\theta. \quad (2.32)$$

Une seconde minimisation de l'énergie du fondamentale par rapport à ϕ nous donne :

$$\sin^2\theta \cos\phi \sin\phi = 0 \quad (2.33)$$

ce qui peut être résolu en prenant $\phi = 0, \pi, \pi/2$ ou $3\pi/2$, cependant les angles $\phi = 0, \pi$ sont les seuls qui sont stables (ceux d'énergie la plus basse). Enfin, une troisième minimisation par rapport à θ nous donne :

$$\cos\theta = -\frac{\omega\omega_0}{4g^2} = -\mu, \quad (2.34)$$

qui n'aura de sens que lorsque $g > \sqrt{\omega\omega_0}/2$ qui correspond au couplage critique de la limite thermodynamique. Donc finalement, nous avons deux états variationnels dégénérés qui minimisent cette énergie que nous exprimerons en nous servant de l'expression (2.29) :

$$\begin{aligned} |\Psi_{\phi=\pi}\rangle &= \left| \frac{g}{\omega} \sqrt{2S(1-\mu^2)} \right\rangle_{\text{phot}} \otimes \left| -\sqrt{\frac{1-\mu}{1+\mu}} \right\rangle_{\text{spin}} \\ |\Psi_{\phi=0}\rangle &= \left| -\frac{g}{\omega} \sqrt{2S(1-\mu^2)} \right\rangle_{\text{phot}} \otimes \left| \sqrt{\frac{1-\mu}{1+\mu}} \right\rangle_{\text{spin}}, \end{aligned} \quad (2.35)$$

où les indices "phot" et "spin" se rapportent à la partie photonique et à la partie atomique respectivement. Ces états ne sont bien sûr pas états propres de l'opérateur de parité $\hat{\Pi}$, ils ne respectent donc pas les symétries de l'Hamiltonien. Il faut alors chercher des combinaisons linéaires de ces deux états qui seront états propres de l'opérateur parité. Il est assez facile de remarquer que $\hat{\Pi} |\Psi_{\phi=\pi}\rangle = |\Psi_{\phi=0}\rangle$. Ainsi des combinaisons linéaires symétriques et anti-symétriques de ces états seront bien états propres de $\hat{\Pi}$:

$$|\Psi_{\pm}\rangle = \mathcal{N}_{\pm} \frac{|\Psi_{\phi=\pi}\rangle \pm |\Psi_{\phi=0}\rangle}{\sqrt{2}} \quad (2.36)$$

avec :

$$\mathcal{N}_{\pm} = \frac{1}{2(1 \pm \mu^{2S} \exp(-S(1 - \mu^2)/\mu))} \quad (2.37)$$

qui sont des états du type "chat de Schrödinger" puisque ils résultent de la superposition de deux états de cohérence atomique et photonique opposée. Il convient alors de se demander lequel de ces deux états est le fondamental. Pour cela, calculons la différence d'énergie entre ces deux états :

$$\begin{aligned} \Delta &= \langle \Psi_+ | \mathcal{H}_{Dicke} | \Psi_+ \rangle - \langle \Psi_- | \mathcal{H}_{Dicke} | \Psi_- \rangle \\ &= 2S\omega \frac{1 - \mu^2}{\mu} \frac{\mu^{2S} \exp[-S(1 - \mu^2)/\mu]}{1 - (\mu^{2S} \exp[-S(1 - \mu^2)/\mu])^2}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Nous en déduisons ainsi que l'état fondamental $|G\rangle$ et l'état excité $|E\rangle$ seront :

$$\begin{aligned} |G\rangle &= |\Psi_- \rangle \\ |E\rangle &= |\Psi_+ \rangle. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Ces états, ne décrivent bien sûr pas de manière précise toutes les propriétés du "vrai" fondamental, ils décrivent par exemple assez mal ce qu'il se passe au voisinage du point critique comme nous pouvons le voir sur la figure 2.10 sur laquelle le recouvrement entre ces états variationnels et les "vrais" états obtenus numériquement est tracé. Cependant ils sont intéressants car ils vont nous permettre de comprendre au moins de manière qualitative le comportement de la plupart des observables en fonction du couplage g et du nombre d'atomes N_{at} . Ils permettent, par exemple, de prédire la quasi dégénérescence du fondamental et du premier excité : lorsque $g > g_c$, car dans ce cas $\Delta \propto \exp\left(-S\omega_0 \frac{1-\mu^2}{\mu}\right) \mu^{2S} \xrightarrow{S \rightarrow \infty, g \rightarrow \infty} 0$ ce qui va être l'élément clé de toute la suite de

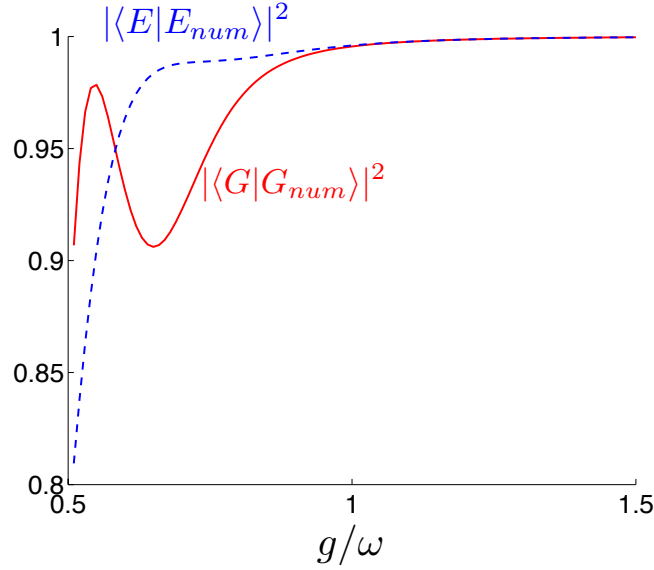


FIGURE 2.10 – Recouvrement entre le fondamental approché (cf. eq. 2.39) et le fondamental numérique (rouge), idem pour le premier état excité (bleu).

notre raisonnement. Le fait que les états variationnels ne décrivent pas de manière précise ce qu'il se passe au voisinage du point critique peut être compris en regardant la forme de ces états dans l'espace des phases. Pour cela, nous pouvons par exemple utiliser la représentation Q de Husimi-Kan [121] de la matrice densité photonique ou atomique réduite, définie par :

$$Q(\alpha) = \langle \alpha | \hat{\rho} | \alpha \rangle, \quad (2.40)$$

pour la matrice densité photonique réduite et par :

$$Q(\eta) = \langle \eta | \hat{\rho} | \eta \rangle, \quad (2.41)$$

pour la matrice densité atomique réduite. Nous avons tracé ces représentations sur la figure 2.11 dans deux cas intéressants. Cette représentation de la matrice densité est intéressante car elle permet de visualiser en quelques sorte la géométrie de la matrice densité dans l'espace des phases, ce qui nous donne de manière visuelle de nombreux renseignements sur l'état du système. Pourquoi avoir choisi la représentation Q qui ne donne pas d'information sur l'intrication (contrairement à la fonction de Wigner par exemple) ? Parce que, une fois la trace partielle effectuée sur la matrice densité totale

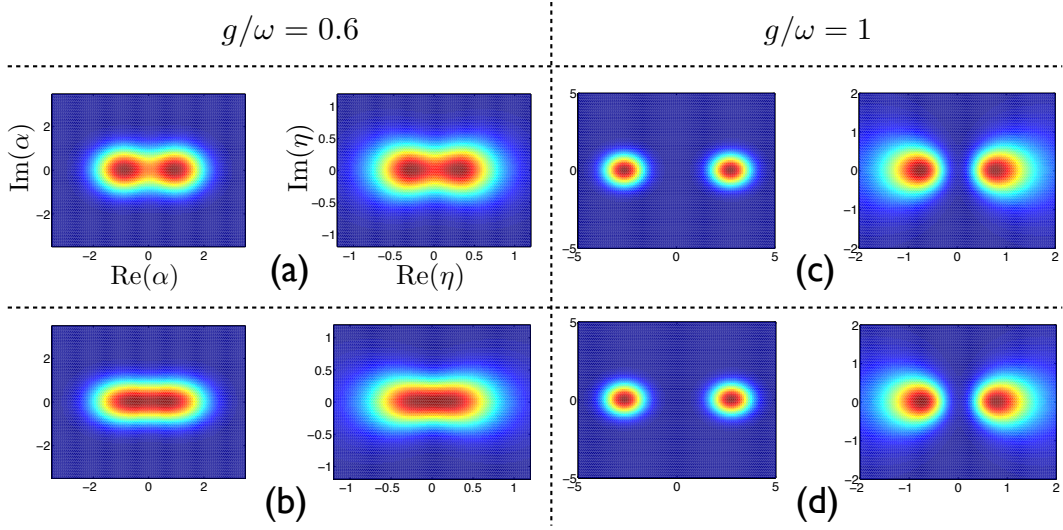


FIGURE 2.11 – (a) : Représentation Q de la matrice densité photonique réduite obtenue à partir de l'état fondamental variationnel (2.39) (figure de gauche) et représentation Q de la matrice densité atomique réduite obtenue à partir du même état (figure de droite), pour un couplage de $g/\omega = 0.6$. (b) : idem pour l'état fondamental calculé numériquement. (c) : pareil que (a) pour un couplage $g/\omega = 1$. (d) : pareil que (b) pour un couplage $g/\omega = 1$ ($N_{at} = 8$ pour l'ensemble des figures).

Nous voyons que pour un couplage proche du couplage critique ($g_c/\omega = 0.5$), le fondamental numérique (fig. (b)) ne ressemble pas vraiment à l'état variationnel (fig. (a)) : il y a bien deux lobes au sein de l'état variationnel qui correspondent à la somme de deux états cohérents qui sont absents pour l'état calculé numériquement qui ressemble à un état squeezé. Pour des couplages plus importants en revanche ($g/\omega = 1$), l'état variationnel (fig. (c)) est quasiment identique à l'état numérique (fig. (d)), ce qui est tout à fait cohérent avec la valeur du recouvrement (fig. 2.10). Le fait que l'état fondamental soit un état squeezé est cohérent avec les résultats en champ moyen obtenus par C. Emary et T. Brandes [53].

(pour obtenir la matrice densité réduite photonique ou atomique), les effets d'interférence (qui peuvent apparaître dans des représentations telles que la fonction de Wigner par l'intermédiaire de la négativité de celle-ci) disparaissent puisque la matrice densité réduite n'est plus qu'un mélange statistique. De plus, d'un point de vue numérique, il est bien plus simple de calculer $Q(\alpha) = \langle \alpha | \hat{\rho} | \alpha \rangle$ que de calculer les transformées de Fourier qui apparaissent dans la définition de la fonction de Wigner par exemple. Nous remarquons sur la figure 2.11 qu'au voisinage du point critique l'état fondamental ne ressemble pas du tout à une superposition statistique d'états cohérents (comme cela devrait être le cas

après avoir pris la trace partielle de la matrice totale) mais plutôt à un état cohérent squeezé, idem pour la matrice densité atomique réduite. Une façon de trouver un meilleur état variationnel serait alors de le chercher sous la forme d'un état squeezé. Faute de temps, nous n'avons pas pu mener les calculs à leur terme.

Après avoir trouvé de bons état variationnels décrivant les propriétés du fondamental et du premier excité, nous pouvons revenir à la discussion de la brisure spontanée de symétrie en taille finie. Nous avons dit que celle-ci ne pouvait avoir lieu mais est-ce bien vrai ? Pour répondre à cette question il faut tout d'abord se rappeler de ce que représente la fonction d'onde : dans notre cas la fonction d'onde est la superposition de deux états de cohérence opposée, ce qui signifie que si nous étions capable de mesurer la cohérence du système à un instant donné, nous obtiendrions par exemple soit $+\alpha$ soit $-\alpha$ pour la partie photonique et le système se verrait projeté sur l'un ou l'autre des états de la superposition ($|\Psi_{\phi=\pi}\rangle$ ou $|\Psi_{\phi=0}\rangle$ respectivement). Si nous répétons cette opération un certain nombre de fois nous aurons en moyenne une cohérence nulle car la probabilité d'obtenir l'un ou l'autre des états est $1/2$. Ainsi nous voyons apparaître une première caractéristique des transitions de phase quantique : elles résultent des fluctuations quantiques (tout comme leur équivalent classique résulte des fluctuations thermiques) et la brisure spontanée de symétrie n'a lieu que pour le résultat d'une mesure particulière. Qu'arrive-t-il au système une fois que nous l'avons mesuré et projeté dans l'un ou l'autre des états ? La réponse à cette question se trouve dans le célèbre article "More is different" [5] dans lequel Anderson prend comme exemple la molécule d'ammoniac (NH_3), qui possède une géométrie pyramidale, l'atome d'azote (chargé négativement, car plus électronégatif que l'hydrogène) étant au sommet de celle-ci et les atomes d'hydrogène (chargés positivement) à ses trois coins. Cette molécule n'est manifestement pas symétrique par rapport au plan dans lequel se trouvent les trois atomes d'hydrogène et possède par conséquent un moment dipolaire électrique non nul. Or, il est possible de montrer que pour des raisons de symétrie de temps et d'espace, aucun état stationnaire en mécanique quantique ne doit posséder de moment électrique non nul. Qu'arrive-t-il à la molécule d'ammoniac dans ce cas ? Et bien elle ne reste pas très longtemps dans cet état particulier et l'atome d'azote oscille entre les deux cotés du plan formé par les atomes d'hydrogène à peu près 3×10^{10} fois par seconde, l'état dans lequel l'atome d'azote se trouve d'un côté du plan n'étant pas un état stationnaire de cette molécule (un état stationnaire serait une superposition symétrique ou antisymétrique à poids égaux des deux configurations). De telle manière qu'en moyenne la symétrie de parité (qui interdit l'existence d'un dipôle

électrique permanent) n'est pas brisée. Si la molécule d'azote est remplacée par une molécule plus lourde, le phosphore, le même phénomène aura lieu mais à une fréquence dix fois moins importante. Il est possible pousser le raisonnement encore plus loin en considérant finalement les sucres produits par des organismes vivants composés d'une quarantaine d'atomes, ces sucres lorsqu'ils sont synthétisés adoptent une certaine forme qui brise la symétrie de l'Hamiltonien qui les décrit et la fréquence d'oscillation est si faible qu'il n'est pas possible de la mesurer en un temps raisonnable (par rapport à l'âge de l'univers), dans ce cas il y a bien "brisure spontanée de symétrie" pour une molécule donnée (qui résulte comme nous l'avons déjà dit des fluctuations quantiques). Cependant, si l'on synthétise un nombre important de molécules, la moitié d'entre elle aura une certaine configuration et l'autre moitié la configuration opposée, si bien qu'en moyenne la symétrie sera restaurée.

Dans le cas du modèle de Dicke qui nous intéresse ici, les états avec la molécule d'azote d'un côté ou de l'autre du plan sont les états de cohérence opposée. Ainsi à la lumière de la discussion d'Anderson nous pouvons analyser le comportement de l'état fondamental du modèle de Dicke. Admettons, pour la discussion que l'état mesuré est $|\Psi_{\phi=0}\rangle$, cet état est une superposition de deux états propres de l'Hamiltonien de Dicke :

$$|\Psi_{\phi=0}\rangle = \frac{|G\rangle - |E\rangle}{\sqrt{2}} \quad (2.42)$$

Il va donc évoluer dans le temps avec une fréquence Δ :

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= \exp(-i\mathcal{H}_{Dicke}t) |\Psi_{\phi=0}\rangle \\ &= \exp(-i[E_G + \Delta/2]t) \{ \exp(i\Delta t/2) |G\rangle - \exp(-i\Delta t/2) |E\rangle \} \\ &= \exp(-i[E_G + \Delta/2]t) \{ \cos(\Delta t/2) |\Psi_{\phi=\pi}\rangle + i \sin(\Delta t/2) |\Psi_{\phi=0}\rangle \} \end{aligned} \quad (2.43)$$

Ainsi, si à un instant ultérieur nous mesurons à nouveau la cohérence photonique de l'état nous aurons en moyenne :

$$\langle \hat{a} \rangle(t) = \frac{N_{at}}{2} \frac{\omega_0}{\omega} \sqrt{\frac{1 - \mu^2}{2\mu}} \cos(\Delta t), \quad (2.44)$$

ce qui signifie que plus le couplage lumière-matière g ou le nombre d'atome N_{at} va être important, plus la dynamique du système va être lente (cf. eq. (2.38)), à tel point qu'en limite thermodynamique le système va même se retrouver "gelé" dans l'un ou

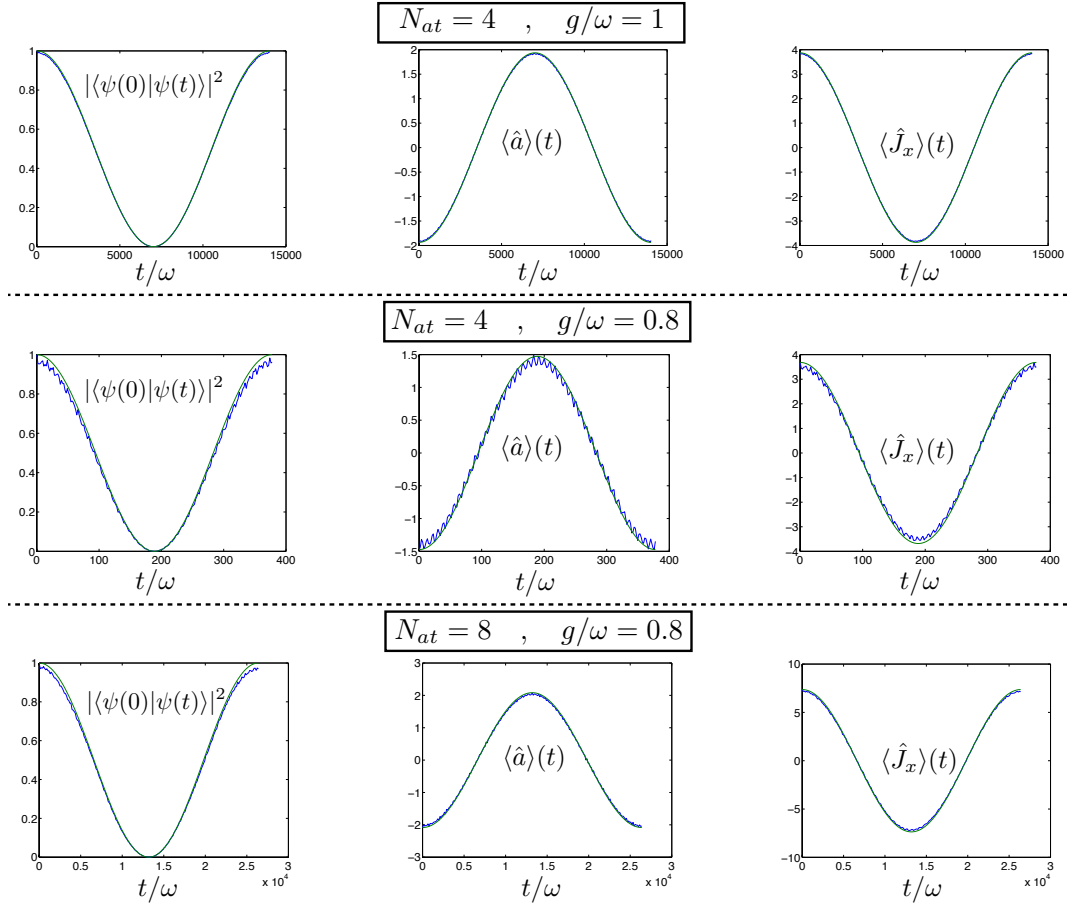


FIGURE 2.12 – Evolution temporelle du recouvrement entre l'état de départ et l'état instantané $|\langle\psi(0)|\psi(t)\rangle|^2$ (figures de gauche), de la valeur moyenne de \hat{J}_x (figures du milieu) et de la valeur moyenne de \hat{a} (figures de droite) pour différentes valeurs de couplage g/ω et nombre d'atome N_{at} : en bleu, le comportement numérique et en vert la modélisation par une sinusoïde de période Δ_{num} qui est la valeur numérique du splitting. Nous voyons que plus le nombre d'atomes et/ou le couplage est important, plus la dynamique est lente car la période d'oscillation des quantités tracées est de plus en plus longue (comme le suggère l'expression (2.38)), cependant, pour modéliser l'évolution des quantités nous avons utilisé la valeur numérique pour le splitting (Δ_{num}) car la valeur analytique (2.38) n'est pas quantitativement correcte (bien qu'elle le soit qualitativement puisqu'elle prédit le bon comportement de Δ en fonction de g/ω et N_{at}).

l'autre des états qui brise la symétrie (car alors $\Delta = 0$), il en va de même pour la limite de couplage infini. Ainsi, sur des échelles de temps inférieures à $1/\Delta$ la symétrie de parité sera effectivement "brisée" même en taille finie. Nous avons tracé sur la figure 2.12

l'évolution de la valeur moyenne des observables \hat{a} et \hat{J}_x ainsi que le recouvrement entre l'état de départ et l'état instantané $|\langle\psi(0)|\psi(t)\rangle|^2$ en prenant comme état de départ un état cohérent de la superposition (2.36) (ce qui correspondrait à l'évolution des valeurs moyennes après avoir mesuré une cohérence atomique ou photonique correspondant à cet état). Nous voyons que l'évolution de ces quantités a bien lieu de la manière que nous avons prédite, cependant la valeur du splitting (2.38) n'étant pas très précise, nous avons modélisé l'évolution par une évolution sinusoïdale de fréquence Δ_{num} qui correspond au splitting calculé numériquement. Nous venons donc de prédire de manière qualitative l'évolution du système en couplage ultra-fort en nous appuyant sur une approche variationnelle.

Ainsi, en régime de couplage ultra-fort, le fondamental et le premier excité du modèle de Dicke peuvent être vus comme les états d'une molécule d'ammoniaque dont il est possible de contrôler la taille (N_{at}) et la fréquence propre (Δ). Il serait donc possible d'étudier expérimentalement, si nous trouvions un dispositif adéquat décrit par le modèle de Dicke, la disparition du caractère quantique, laissant place à un comportement classique en jouant sur la taille du système et l'amplitude du couplage lumière-matière (ce qui est équivalent à augmenter la taille des molécules dans la discussion d'Anderson). Il est bon de souligner que contrairement aux états chats de Schrödinger utilisés par le groupe du LKB par exemple [29], les états chats de Schrödinger décrits dans cette section sont des états propres de l'Hamiltonien, et pas n'importe quels états propres : ce sont des états fondamentaux, ils sont donc à priori bien plus résistants aux bruits extérieurs [105]. En effet, un bain à température nulle ne peut qu'accepter de l'énergie, il ne peut pas en céder, ce qui a pour effet d'amener à terme le système dans son état fondamental (l'état fondamental est donc également état stationnaire pour un bain à température nulle). Nous voyons donc qu'à priori, la théorie n'impose pas de limite de taille (N_{at}) ou de cohérence pour cet état chat de Schrödinger qui pourrait donc potentiellement être macroscopique.

Suceptibilité du modèle de Dicke

La quasi dégénérescence de $|G\rangle$ et $|E\rangle$ a d'autres implications, notamment concernant la sensibilité du système à une perturbation du type $\epsilon(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$ (avec $\epsilon \ll \omega, \omega_0, g$) qui brise explicitement la symétrie. Pour étudier cet effet, considérons l'Hamiltonien $H_{Dicke} + \epsilon(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$. Nous avons tracé sur la figure 2.13 $\langle\hat{J}_x\rangle$ en taille finie, en fonction du couplage lumière-matière, pour différentes valeurs du nombre de systèmes à deux

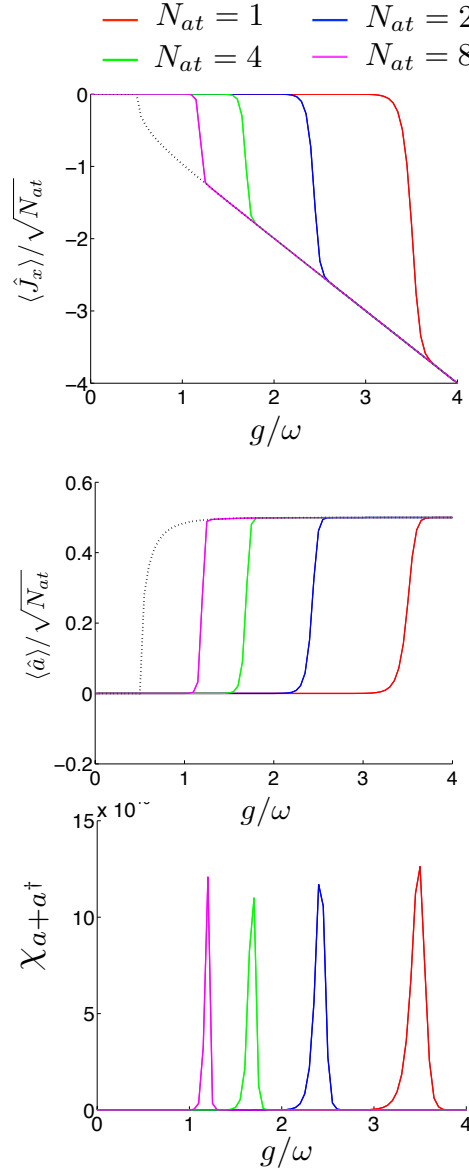


FIGURE 2.13 – Valeur moyenne de \hat{J}_x (figure du haut) et valeur moyenne de \hat{a} (figure du milieu) pour différentes valeurs du nombre d’atomes en présence d’une perturbation d’amplitude $\epsilon = 10^{-12}\omega$. Susceptibilité χ_{a+a^\dagger} pour des nombres d’atomes différents (figure du bas). Le système est extrêmement sensible à la moindre perturbation extérieur, ce qui est d’autant plus vrai que le nombre d’atomes est important.

niveaux et pour $\epsilon = 10^{-12}\omega$. Nous remarquons que même à taille finie, l’effet de ce terme qui brise la symétrie de parité est non négligeable (bien que son amplitude soit extrêmement faible), et que plus le nombre de spins est important, plus le couplage

lumière-matière nécessaire pour voir l'effet de ce type de terme est faible. Nous avons également tracé la susceptibilité du système à cette perturbation $\chi_{a+a^\dagger} = \frac{\partial \langle J_x \rangle}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0}$ qui rend justement compte de la réponse du système à une perturbation sur l'observable $\hat{a} + \hat{a}^\dagger$ dont nous voyons qu'elle diverge à l'équivalent à taille finie du point critique. Nous pouvons en déduire que la symétrie de parité peut être brisée, pour une fluctuation très faible ($\epsilon = 10^{-12}\omega$). Comment expliquer une telle susceptibilité ? Pour cela, la théorie des perturbations à l'ordre 1 suffit. En effet, comme $\epsilon \ll \omega, \omega_0$, nous pouvons traiter le terme $\epsilon(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$ en perturbations pour voir son effet sur le fondamental et le premier excité :

$$\begin{aligned} |\tilde{G}\rangle &= |G\rangle - \frac{\epsilon}{\Delta} \langle E | (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) | G \rangle | E \rangle \\ |\tilde{E}\rangle &= |E\rangle + \frac{\epsilon}{\Delta} \langle G | (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) | E \rangle | G \rangle, \end{aligned} \quad (2.45)$$

que nous pouvons réécrire :

$$\begin{aligned} |\tilde{G}\rangle &= (|G\rangle - \zeta |E\rangle) / \sqrt{1 + \zeta^2} \\ |\tilde{E}\rangle &= (|E\rangle + \zeta |G\rangle) / \sqrt{1 + \zeta^2} \end{aligned} \quad (2.46)$$

avec $\zeta = (\epsilon/\Delta) \langle E | (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) | G \rangle$, ce qui écrit autrement donne :

$$\begin{aligned} |\tilde{G}\rangle &= ((1 - \zeta) |\Psi_{\phi=\pi}\rangle + (1 + \zeta) |\Psi_{\phi=0}\rangle) / \sqrt{2(1 + \zeta^2)} \\ |\tilde{E}\rangle &= ((1 + \zeta) |\Psi_{\phi=\pi}\rangle + (1 - \zeta) |\Psi_{\phi=0}\rangle) / \sqrt{2(1 + \zeta^2)} \end{aligned} \quad (2.47)$$

Nous voyons ainsi que l'effet d'un tel terme va être de coupler les états $|G\rangle$ et $|E\rangle$ de façon à briser la symétrie de parité. Plus précisément lorsque $\zeta = 1$ par exemple les nouveaux états fondamental et excités seront $|\tilde{G}\rangle = |\Psi_{\phi=\pi}\rangle$ et $|\tilde{E}\rangle = |\Psi_{\phi=0}\rangle$ qui sont justement les états qui brisent la symétrie de manière maximale. Pour des valeurs de $\zeta > 1$, l'approche perturbative cesse d'être valable, l'amplitude de la correction "perturbative" à l'état fondamentale devient supérieure à l'amplitude de l'état lui-même ce qui pose problème. Il convient cependant de rappeler que si nous démarrons de l'état fondamental de l'Hamiltonien de Dicke sans perturbation (noté $|G\rangle$ dans la section précédente) et que subitement le système n'est plus décrit pas \mathcal{H}_{Dicke} seul mais par $\mathcal{H}_{Dicke} + \epsilon(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$, le même argument que dans la section précédente implique que plus le nombre d'atomes et/ou le couplage lumière matière sont importants, plus l'échelle de temps sur laquelle le terme additionnel $\epsilon(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$ va modifier de manière appréciable l'état du système va être

importante (cette échelle de temps est à nouveau proportionnelle à $1/\Delta$).

2.4 Stabilité de l'état fondamental

Jusqu'à présent, nous avons considéré l'ensemble composé de la cavité et des atomes comme un système isolé. Cependant, lors d'une expérience réelle, le système n'est jamais complètement isolé, il interagit avec son environnement. Qu'en est-il alors de la stabilité de l'état fondamental du modèle de Dicke contenant des photons et des excitations atomiques ? Que deviennent ces excitations ? Les photons ne vont-ils pas être émis par la cavité rendant la phase superradiante instable ? Une réponse naïve serait de dire qu'en effet, comme l'état fondamental consiste en un état chat de Schrödinger, i.e. une superposition d'états cohérents (de spins et photoniques), leur cohérence étant non nulle, cela signifie qu'en moyenne il y a des photons dans la cavité. Par conséquent, les miroirs n'étant pas parfaits, ces photons peuvent s'échapper de la cavité, rendant ainsi l'état fondamental du modèle de Dicke instable. Cette réponse est bien sûr erronée, d'une part parce que l'état fondamental étant par définition l'état de plus basse énergie, retirer un photon à celui-ci revient à exciter le système. Or, à température nulle, l'environnement (le réservoir) auquel est couplé le système ne peut qu'accepter de l'énergie, il ne peut pas en céder. D'autre part parce que si ces photons pouvaient vraiment s'échapper de la cavité, il serait possible de créer des photons (donc de l'énergie) à partir du vide, i.e. de récupérer de l'énergie sans en fournir, ce qui n'a de manière évidente pas de sens physique. Si nous utilisons une équation maîtresse sous forme de Lindblad traditionnellement utilisée en optique quantique :

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = -i \left[\hat{H}, \hat{\rho} \right] + \gamma \hat{a} \hat{\rho} \hat{a}^\dagger - \frac{\gamma}{2} (\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho} + \hat{\rho} \hat{a}^\dagger \hat{a}) + \sum_i \left\{ \kappa \hat{\sigma}_-^i \hat{\rho} \hat{\sigma}_+^i - \frac{\kappa}{2} (\hat{\sigma}_+^i \hat{\sigma}_-^i \hat{\rho} + \hat{\rho} \hat{\sigma}_+^i \hat{\sigma}_-^i) \right\}, \quad (2.48)$$

avec γ le taux de pertes de la cavité et κ le taux de pertes des excitations atomiques, nous arriverions à la première réponse qui est la réponse erronée (à savoir fondamental instable), comme l'ont fait remarquer F. Beaudoin et al. [15]. Cependant cette équation est le fruit de nombreuses approximations, notamment une hypothèse de faible couplage entre les photons et les atomes ($g \ll \omega, \omega_0$) qui peuvent encore être vus comme deux entités différentes. Dans les régimes dans lesquels le système se trouve en phase superradiante,

cette hypothèse n'est plus valable et il faut alors revenir à une équation maîtresse plus générale que l'équation (2.48) dont il est possible de trouver la dérivation dans la littérature [28, 38, 39] :

$$\frac{d\hat{\rho}_s}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [H_s, \hat{\rho}_s] + \frac{1}{\hbar^2} \sum_j \left\{ \hat{U}_{(j)} \hat{\rho}_s(t) \hat{S}_{(j)} + \hat{S}_{(j)} \hat{\rho}_s(t) \hat{U}_{(j)}^\dagger - \hat{S}_{(j)} \hat{U}_{(j)} \hat{\rho}_s(t) - \hat{\rho}_s(t) \hat{U}_{(j)}^\dagger \hat{S}_{(j)} \right\}, \quad (2.49)$$

avec $U_{(j)} = \int_0^\infty d\tau g_{(j)}(\tau) S_{(j)}(-\tau)$, $g_j(\tau)$ étant la fonction d'autocorrélation du réservoir ($g_{(j)}(\tau) = \langle R_{(j)}(t) R_{(j)}(t - \tau) \rangle$) et en ayant considéré un couplage entre le système et le réservoir du type :

$$V = \sum_j R_{(j)} S_{(j)}, \quad (2.50)$$

avec $R_{(j)}$ des opérateurs du réservoir et $S_{(j)}$ des opérateurs du système. L'équation maîtresse (2.49) est le fruit de nombreuses approximations notamment : une approximation de faible couplage entre le réservoir et le système, une approximation dite de Born qui consiste à négliger les corrélations qui pourraient apparaître au cours du temps entre le système et le réservoir, une approximation dite de Markov qui consiste à considérer que le temps de corrélation du système (i.e. la largeur temporelle des fonctions $g_{(j)}(\tau)$) est très faible devant les temps d'intégration de l'équation maîtresse (2.49). Ces hypothèses ayant été décrites, il convient de se placer dans la base des états propres de l'Hamiltonien du système que nous noterons $|k\rangle$ tels que $H_s |k\rangle = \hbar\omega_k |k\rangle$, l'Hamiltonien H_s et les opérateurs $S_{(j)}$ s'expriment alors :

$$\begin{aligned} H_s &= \sum_k \hbar\omega_k |k\rangle \langle k| \\ S_{(j)} &= \sum_{k,l} S_{(j),kl} |k\rangle \langle l|. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Attardons-nous un peu plus sur l'expression des opérateurs $U_{(j)}$ dans cette base :

$$U_{(j)} = \sum_{k,l} \int_0^\infty d\tau g_{(j)}(\tau) S_{(j),kl} e^{i(\omega_l - \omega_k)\tau} |k\rangle \langle l|. \quad (2.52)$$

En supposant par exemple que le réservoir est composé d'un ensemble d'oscillateurs har-

moniques, nous aurions une fonction d'autocorrélation $g_{(j)}(\tau)$ du réservoir à température nulle [39] :

$$g_{(j)}(\tau) = \sum_{\lambda} \tilde{g}_{(j)}(\omega_{\lambda}) e^{-i\omega_{\lambda}\tau}, \quad (2.53)$$

avec ω_{λ} les fréquences des modes bosoniques du réservoir. cette expression une fois injectée dans (2.52) et une fois l'intégrale temporelle opérée nous donne :

$$U_{(j)} = \sum_{k,l} \tilde{g}_{(j)}(\omega_l - \omega_k) S_{(j),kl} |k\rangle \langle l|. \quad (2.54)$$

Cette expression nous permet de dégager un comportement intéressant : dans l'espace des fréquences, la fonction d'autocorrélation du bain doit être nulle pour des fréquences négatives à température nulle, ce qui est la manifestation mathématique du fait que le bain ne peut qu'absorber de l'énergie et non en céder (cf. [39, 36] pour un exemple de bain composé d'un ensemble de modes bosoniques). Ceci impose donc $\tilde{g}(\omega \leq 0) = 0$, ce qui implique que l'opérateur $U_{(j)}$ ne peut que faire passer le système d'un état à une certaine énergie à un état avec une énergie moindre. Grâce à ces observations, il est facile de montrer que l'état fondamental de l'Hamiltonien H_s est un état stationnaire de l'équation maîtresse (2.49), il est notamment possible de montrer que le second membre de cette équation est nul en prenant comme état de départ l'état fondamental (noté $\hat{\rho}_s(t) = |0\rangle \langle 0|$), dans ce cas nous obtenons par exemple :

$$\begin{aligned} \hat{U}_j \hat{\rho}_s(t) \hat{S}_{(j)} &= \sum_{k,l} \tilde{g}(\omega_l - \omega_k) S_{(j),kl} |k\rangle \langle l| |0\rangle \langle 0| \sum_{m,n} S_{(j),mn} |m\rangle \langle n| \\ &= \sum_{k,n} \tilde{g}(\omega_0 - \omega_k) S_{(j),k0} S_{(j),0n} |k\rangle \langle n|. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Or, $\omega_0 - \omega_k \leq 0, \forall k$, ce qui implique que $\tilde{g}(\omega_0 - \omega_k) = 0, \forall k$, ce qui nous permet d'en déduire que :

$$\hat{U}_{(j)} |0\rangle \langle 0| \hat{S}_{(j)} = 0 \quad , \quad \forall j. \quad (2.56)$$

Il en va de même pour les autres termes du second membre de l'équation (2.49) en utilisant le même argument. Ces considérations nous permettent donc d'affirmer que pour un environnement satisfaisant aux hypothèses énoncés précédemment, l'état fondamental quel qu'il soit est stable, qu'il contienne des excitations photoniques et/ou atomiques

ou non. Les photons dans l'état fondamental sont donc "virtuels" et ne peuvent pas s'échapper de la cavité, ce qui fait du nom "transition de phase superradiante" un nom plutôt malheureux car il laisserait penser que le système émet de la lumière alors que ce n'est pas le cas.

2.5 Unique réalisation expérimentale à ce jour : Modèle de Dicke hors équilibre.

Nous allons, dans cette thèse, nous intéresser uniquement aux propriétés du modèle de Dicke à l'équilibre. Il nous paraît cependant intéressant de décrire brièvement la seule réalisation expérimentale à ce jour de ce modèle qui a été effectué avec un condensat de Bose d'atomes ultra-froids pompé optiquement (donc hors équilibre) qui peut de manière effective être décrite par le modèle de Dicke. Cette expérience constitue donc en quelques sortes une "simulation quantique" du modèle de Dicke. La description théorique est basée sur une proposition de Dimer et al. en 2007 [47] concernant un système de cavity-QED pompé, la proposition de réalisation avec un condensat de Bose a quant à elle été effectuée en 2010 par David Nagy et al. [99], et la réalisation expérimental a eu lieu la même année dans le groupe de Tilman Esslinger [13]. L'expérience consiste à placer un condensat de Bose dans une cavité optique (cf. figure 2.14) et à le pomper suivant un certain axe avec une onde stationnaire. Le paramètre qui contrôle l'interaction lumière-matière effective de ce système est la puissance de la pompe P . Lorsque la puissance de la pompe est inférieures à sa valeur critique ($P < P_{cr}$), le condensat qui est homogène suivant l'axe de la cavité optique diffuse la lumière de la pompe au sein de la cavité mais sans accord de phase, ce qui donne lieu à des interférences destructives des ondes émises et aucun photon dans le mode de cavité. Lorsque la puissance de la pompe est supérieure à sa valeur critique ($P > P_{cr}$) en revanche, le condensat de Bose n'est plus homogène suivant l'axe de la cavité et s'organise en un mode dont la forme spatiale est un damier (il y a deux modes dégénérés un mode appelé pair et l'autre appelé impaire cf. fig. 2.14 qui correspondent aux deux états dégénérés du modèle de Dicke) qui diffuse de manière cohérente cette fois-ci la lumière provenant de la pompe dans le mode de cavité qui peut être détectée par le module de détection de photons uniques (SPCM). Le diagramme de phase expérimental est présenté sur la figure 2.15 où est représenté le nombre moyen de photons dans le mode de cavité en fonction de la puissance de la pompe et de la différence de fréquence entre la cavité et la pompe. Nous voyons clairement apparaître

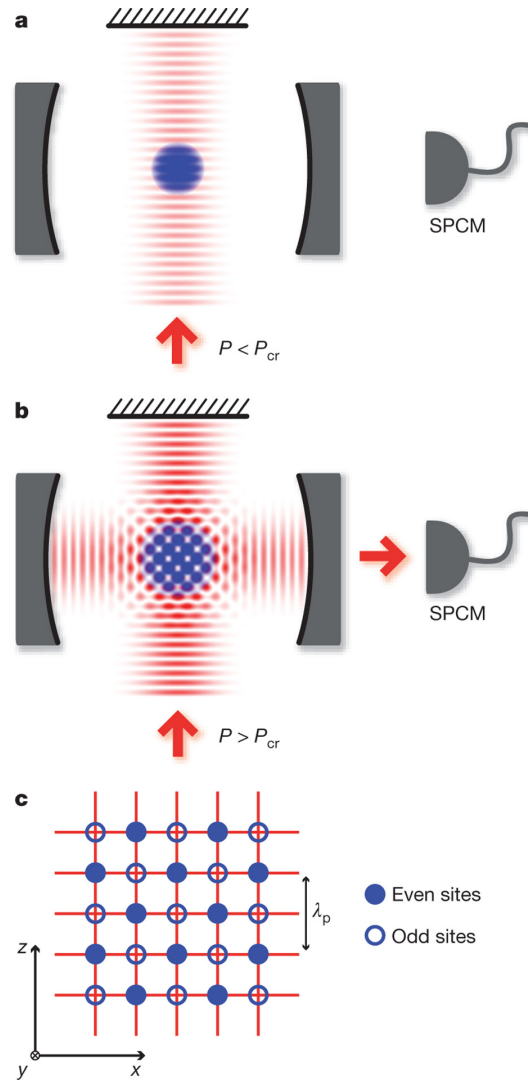


FIGURE 2.14 – Un condensat de Bose est placé au sein d’une cavité optique et pompé suivant un axe perpendiculaire à cette dernière. Lorsque la puissance de pompe est inférieure à une valeur critique P_{cr} (a), il n’y a pas de lumière diffusée dans la cavité. Lorsque la puissance de pompe est supérieure à la valeur critique P_{cr} (b), le condensat s’organise suivant un motif en damier (représenté sur la figure (c)) et diffuse de la lumière de la pompe au sein de la cavité. Il existe deux configurations spatiales différentes : une appelée paire et une autre appelée impaire (c), le système choisissant l’une des deux ce qui brise la symétrie de parité. (figure extraite de [13]).

deux zones distinctes : nombre moyen de photons nuls (phase normale) et nombre moyen de photons non nul (phase superradiante). Des études expérimentales approfondies de

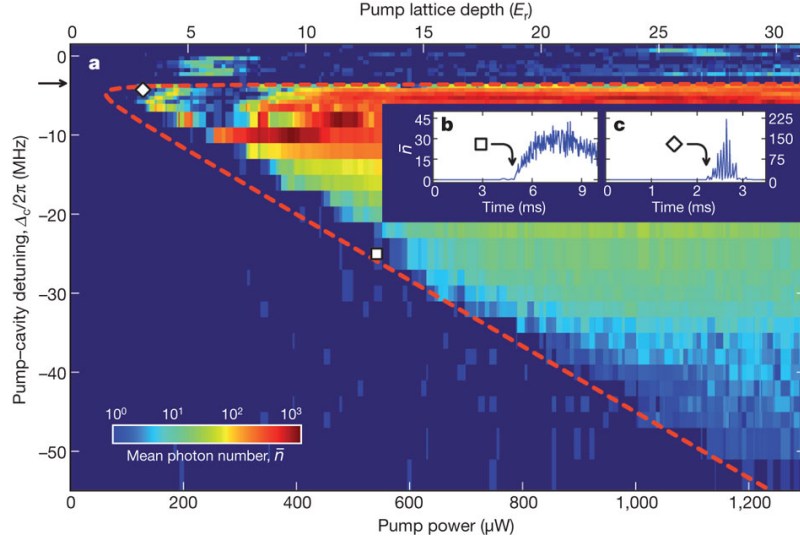


FIGURE 2.15 – Nombre moyen de photons diffusés dans la cavité optique en fonction de la puissance de pompe et du désaccord de fréquence entre la cavité optique et la pompe. Nous identifions aisément deux régions : une première dans laquelle le nombre moyen de photons est nul (la phase normale) et la seconde dans laquelle le nombre moyen de photons est non nul (la phase superradiante) (figure extraite de [13]).

cette transition de phase, notamment concernant la brisure spontanée de symétrie dans ce système ont également été effectuées par le même groupe [14]. Des études théoriques approfondies de la transition de phase hors équilibre, notamment des exposants critiques de celle-ci (différents de ceux pour le modèle de Dicke isolé) ont également été effectuées en limite thermodynamique par D. Nagy et al. [100], et en taille finie par G. Kónya et al. [85].

La différence majeure avec ce qui a été exposé jusqu'à présent est que dans le cadre de cette expérience, le système est pompé optiquement et se trouve hors équilibre : les photons mesurés sont "réels" et émis directement par le dispositif. Tandis que dans le cadre du modèle de Dicke à l'équilibre, qui va être le sujet de toute la suite de cette thèse, les photons sont "virtuels" : ils se trouvent au sein de l'état fondamental, qui par définition est l'état de plus basse énergie du système, ils ne peuvent par conséquent pas être émis par la cavité (car ce processus aurait pour effet d'exciter le système), ce qui pose par ailleurs des questions quant à la mesure de ceux-ci.

Chapitre 3

Théorème No-go pour les transitions de phase superradiantes

Dans les chapitres précédents, nous avons montré l'intérêt certain d'un point de vue fondamental de la limite de couplage ultra-fort ($g \gg \omega, \omega_0$) et de la limite thermodynamique ($N_{at} \rightarrow \infty$) qui donne lieu à une transition de phase dite "superradiante". Dans le cas des atomes en cavité (cavity-QED), le régime de couplage ultra-fort ne pouvant pas être atteint, la limite thermodynamique est bien plus pertinente (bien que ces deux limites possèdent des similitudes). Cependant, de nombreux travaux [116, 103, 134] montrent que l'Hamiltonien de Dicke ne décrit pas de façon satisfaisante un ensemble d'atomes en cavité, un terme a en effet été négligé au départ dans notre étude : le terme diamagnétique également appelé terme A^2 (cf. eq. (1.1)), qui avait été négligé en première approche. L'effet de ce terme sur la transition de phase n'est pas bénin puisqu'il semble l'interdire pour des systèmes de cavity-QED. Nous allons donc approfondir la question dans ce chapitre, en présentant tout d'abord une dérivation de l'argument qui semble interdire cette transition de phase et a donné lieu à ce qu'on appelle le "théorème No-go pour les transitions de phase superradiantes". Puis, nous allons montrer que sous d'autres hypothèses, ce théorème n'est plus vérifié et rend possible la transition de phase superradiante. Enfin, nous discuterons les hypothèses et présenterons notre point de vue sur la question.

3.1 Terme diamagnétique (A^2)

Nous avons vu dans les chapitres précédents que l'Hamiltonien de Dicke est obtenu en faisant un certain nombre d'approximations, plus particulièrement en omettant le terme diamagnétique (également appelé terme A^2). Ce terme est absolument nécessaire et fondamental puisqu'il garantit l'invariance de jauge de l'électrodynamique. Nous allons donc à présent inclure ce terme dans notre étude afin de voir quel sera l'effet de ce dernier sur la transition de phase. L'Hamiltonien de départ de cette étude sera donc l'Hamiltonien de couplage lumière-matière, que nous rappelons ici :

$$\mathcal{H}_{quant} = \sum_{i=1}^{N_{at}} \left\{ \sum_{j=1}^{N_{el}} \frac{(\hat{\mathbf{p}}_{i_j} - q_{i_j} \hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{r}}_{i_j}))^2}{2m_{i_j}} + V(\hat{\mathbf{r}}_{i_1}, \dots, \hat{\mathbf{r}}_{i_{N_{el}}}) \right\} + \sum_i \hbar \omega_i (a_i^\dagger a_i + 1/2). \quad (3.1)$$

Le champ électromagnétique étant quantifié, l'expression du potentiel vecteur est : $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \sum_l \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega_l V}} [\hat{a}_l \boldsymbol{\epsilon}_l e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + \hat{a}_l^\dagger \boldsymbol{\epsilon}_l e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}]$.

La parenthèse $(\hat{\mathbf{p}}_{i_j} - q_{i_j} \hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{r}}_{i_j}))^2$ une fois développée, nous permet de distinguer trois termes au sein de l'Hamiltonien en jauge de Coulomb ($\nabla \cdot \hat{\mathbf{A}} = 0$) :

$$\mathcal{H}_{quant} = \mathcal{H}_{at} + \mathcal{H}_{int} + \mathcal{H}_{lum} \quad (3.2)$$

Ainsi, nous voyons que l'Hamiltonien du système est la somme d'un terme atomique représentant la partie matière (\mathcal{H}_{at}), d'un terme représentant la partie lumière (\mathcal{H}_{lum}) et d'un terme décrivant l'interaction lumière-matière (\mathcal{H}_{int}), dont les expressions sont les suivantes :

$$\mathcal{H}_{at} = \sum_{i=1}^{N_{at}} \left\{ \sum_{j=1}^{N_{el}} \frac{\hat{\mathbf{p}}_{i_j}^2}{2m_{i_j}} + V(\hat{\mathbf{r}}_{i_1}, \dots, \hat{\mathbf{r}}_{i_{N_{el}}}) \right\}, \quad (3.3)$$

$$\mathcal{H}_{int} = - \sum_{i=1}^{N_{at}} \sum_{j=1}^{N_{el}} q_{i_j} \frac{\hat{\mathbf{p}}_{i_j} \cdot \hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{r}}_{i_j})}{m_{i_j}},$$

$$\mathcal{H}_{lum} = \sum_{i=1}^{N_{at}} \sum_{j=1}^{N_{el}} q_{i_j}^2 \frac{\hat{\mathbf{A}}^2(\hat{\mathbf{r}}_{i_j})}{m_{i_j}} + \sum_i \hbar \omega_i (a_i^\dagger a_i + 1/2). \quad (3.4)$$

Afin de rendre la discussion possible, il convient de se ramener à un Hamiltonien qui possède une forme proche de l'Hamiltonien de Dicke. Pour cela, il est nécessaire de faire plusieurs approximations, la première étant l'approximation des grandes longueurs

d'ondes ($\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}_{i_j}) \approx \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}_0) = \hat{\mathbf{A}}_0$ avec \mathbf{r}_0 la position moyenne des atomes) qui est justifiée lorsque la taille de l'ensemble atomique est petite par rapport à la longueur d'onde de la lumière incidente. Il sera également commode de réécrire les opérateurs atomiques dans la base propre de l'Hamiltonien atomique ($\mathcal{H}_{at} = \sum_i h_{at}^i$), en négligeant les interactions entre les charges faisant parties d'atomes différents (i.e. les interaction inter-atomiques). En notant $|k\rangle_i$ les états propres des h_{at}^i tels que $h_{at}^i |k\rangle_i = \hbar\omega_k |k\rangle_i$, nous obtenons :

$$\mathcal{H}_{at} = \sum_{i=1}^{N_{at}} \sum_k \hbar\omega_k |k\rangle_i \langle k|_i, \quad (3.5)$$

$$\mathcal{H}_{int} = \sum_{k,l} \frac{\hbar\Omega_{kl}}{\sqrt{N_{at}}} \sum_{i=1}^{N_{at}} (|k\rangle_i \langle l|_i + |l\rangle_i \langle k|_i) (\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad (3.6)$$

$$\mathcal{H}_{lum} = \hbar D (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2 + \hbar\omega (\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1/2), \quad (3.7)$$

avec :

$$\hbar\Omega_{kl} = \sqrt{N_{at}} \left| \langle k|_i \sum_{j=1}^{N_{el}} q_{ij} \frac{\hat{\mathbf{p}}_{ij}}{m_{ij}} |l\rangle_i \cdot \mathbf{A}_0 \right|, \quad (3.8)$$

$$\hbar D = \left(\sum_{i=1}^{N_{at}} \sum_{j=1}^{N_{el}} \frac{q_{ij}^2}{2m_{ij}} \right) |\mathbf{A}_0|^2. \quad (3.9)$$

Et finalement, l'Hamiltonien total que nous devons considérer est :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}/\hbar = & \sum_{i=1}^{N_{at}} \sum_k \hbar\omega_k |k\rangle_i \langle k|_i + \hbar\omega (\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1/2) + \hbar D (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2 \\ & + \sum_{k,l} \frac{\hbar\Omega_{kl}}{\sqrt{N_{at}}} \sum_{i=1}^{N_{at}} (|k\rangle_i \langle l|_i + |l\rangle_i \langle k|_i) (\hat{a} + \hat{a}^\dagger). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Cependant, bien que l'amplitude des termes Ω_{kl} et D semble être indépendante, il n'en est rien. En effet, ces amplitudes sont contraintes du fait de la forme de l'Hamiltonien atomique, ce qui va faire l'objet de la prochaine discussion.

3.2 Règle de somme de Thomas-Reiche-Kuhn (TRK)

Il existe de nombreuses règles de somme en physique atomique qui sont la plupart du temps la conséquence de symétries spécifiques de l'Hamiltonien qui décrit le système considéré. Dans le cas qui nous intéresse, le système est composé de N_{at} atomes identiques dont l'Hamiltonien est de la forme $\mathcal{H}_{at} = \sum_i h_{at}^i$. Or, dans cette partie nous allons uniquement nous intéresser à des propriétés à un atome, nous allons donc prendre comme point de départ l'Hamiltonien d'un atome unique (dans lequel nous avons volontairement omis l'indice i pour alléger les notations) :

$$h_{at} = \sum_{j=1}^{N_{el}} \frac{\hat{\mathbf{p}}_j^2}{2m_j} + V(\hat{\mathbf{r}}_1, \dots, \hat{\mathbf{r}}_{N_{el}}), \quad (3.11)$$

nous noterons $|k\rangle$ les états propres de celui-ci tels que $h_{at} |k\rangle = \hbar\omega_k |k\rangle$.

La symétrie de cet Hamiltonien est évidente : il est la somme d'un terme cinétique ne dépendant que de l'opérateur impulsion $\hat{\mathbf{p}}_j$ et d'un terme de potentiel qui ne dépend que de la position des électrons au sein de l'atome $\hat{\mathbf{r}}_j$. La règle de somme dite de "Thomas-Reiche-Kuhn" (TRK) va être la conséquence directe de cette symétrie. En effet si nous faisons commuter deux fois l'opérateur dipôle total ($\hat{\mathbf{d}} = \sum_k q_k \hat{\mathbf{r}}_k$) avec h_{at} nous obtenons :

$$\begin{aligned} \left[[h_{at}, \hat{\mathbf{d}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}], \hat{\mathbf{d}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \right] &= -\hbar^2 \sum_k \frac{q_k^2}{m_k} \\ h_{at}(\hat{\mathbf{d}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon})^2 - 2\hat{\mathbf{d}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} h_{at} \hat{\mathbf{d}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + (\hat{\mathbf{d}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon})^2 h_{at} &= -\hbar^2 \sum_k \frac{q_k^2}{m_k}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Nous voyons immédiatement que ce double commutateur est diagonal. Ainsi nous pouvons nous contenter de calculer les termes diagonaux de l'opérateur à gauche de l'égalité, en introduisant l'identité $\mathbb{1} = \sum_k |k\rangle \langle k|$ nous obtenons :

$$\frac{1}{\hbar} \sum_k \omega_{kl} |\hat{\mathbf{d}}_{kl} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}|^2 = \sum_k \frac{q_k^2}{2m_k}. \quad (3.13)$$

Cette règle de somme peut se mettre sous une forme plus compacte en supposant que les particules chargées ont toutes même masse m_e (masse d'un électron) et même charge e

(charge d'un électron), ce qui paraît raisonnable puisque dans les gammes de fréquence qui nous intéressent seuls des processus électroniques ont lieu. Il est également intéressant d'introduire la force d'oscillateur d'une transition qui est une quantité sans dimension, bien connue des atomistes :

$$f_{ij}^{\epsilon} = \frac{1}{N_{el}} \frac{2m_e}{\hbar} \omega_{ji} |\hat{\mathbf{r}}_{ij} \cdot \boldsymbol{\epsilon}|^2. \quad (3.14)$$

La règle de somme TRK prendra ainsi la forme compacte :

$$\sum_k f_{lk}^{\epsilon} = 1, \forall l. \quad (3.15)$$

Nous voyons donc que cette règle de somme est une propriété atomique uniquement (les photons n'y jouent aucun rôle) et est le fruit d'une symétrie dans l'Hamiltonien qui les décrit. Cependant, grâce à cette propriété, nous allons pouvoir déterminer la valeur que peut prendre le rapport du couplage dipolaire électrique et du terme diamagnétique. Ceci sera l'objet de la section suivante.

3.3 Lien entre l'amplitude du terme diamagnétique et du terme de couplage dipolaire électrique

Grâce à la propriété de symétrie de l'Hamiltonien atomique dont il a été question plus tôt, il nous est possible de réécrire l'Hamiltonien d'interaction en terme des opérateurs de dipôle électrique plutôt qu'en terme des opérateurs d'impulsion des particules. En effet :

$$[h_{at}, \hat{\mathbf{d}}] = -i\hbar \sum_j \frac{q_j}{m_j} \mathbf{p}_j. \quad (3.16)$$

Ainsi, nous aurons :

$$\hbar\Omega_{kl} = \left| \frac{i}{\hbar} \langle k | [h_{at}, \hat{\mathbf{d}}] | l \rangle \cdot \mathbf{A}_0 \right| = \omega_{kl} |\mathbf{d}_{kl} \cdot \mathbf{A}_0|, \quad (3.17)$$

qui d'après la règle de somme TRK nous donne :

$$\sum_k \hbar \frac{\Omega_{kl}^2}{\omega_{kl}} = \sum_k \frac{q_k^2}{2m_k} |\mathbf{A}_0|^2 = \hbar D, \quad (3.18)$$

Soit encore :

$$\sum_k \frac{\Omega_{kl}^2}{\omega_{kl} D} = 1. \quad (3.19)$$

Ainsi, nous voyons que pour chaque transition les forces d'oscillateur relient l'amplitude du terme dipolaire électrique et l'amplitude du terme diamagnétique via la relation suivante :

$$\frac{\Omega_{kl}^2}{\omega_{kl} D} = f_{kl}. \quad (3.20)$$

Pour conclure cette partie, nous voyons que le terme diamagnétique n'est pas indépendant des autres termes puisqu'ils sont liés par l'équation (3.20). De plus, du fait de la règle de somme TRK nous avons une contrainte assez forte sur ces rapports qui est donnée par (3.19).

3.4 Théorème No-go pour les transitions de phase superradiantes dans le cas d'un ensemble de systèmes à deux niveaux.

Dans le chapitre sur le modèle de Dicke il était question de transition de phase d'un ensemble de systèmes à deux niveaux couplés à un champ photonique. Nous allons à présent examiner dans quelle mesure cette transition de phase est modifiée en ajoutant à l'Hamiltonien de Dicke un terme A^2 qui lui manquait. Pour cela, il nous est nécessaire de faire une approximation de système à deux niveaux sur les Hamiltoniens (3.5) et (3.6), ce qui nous donnera l'Hamiltonien total suivant pour le système :

$$\mathcal{H}/\hbar = \omega(\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1/2) + \omega_0 J_z + \frac{\Omega_0}{\sqrt{N_{at}}} J_x (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) + D(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2. \quad (3.21)$$

Nous reconnaissons ici l'Hamiltonien de Dicke auquel nous avons ajouté le terme diamagnétique. En suivant la même démarche que dans le chapitre précédent (transformation de Holstein-Primakoff, calcul de l'énergie du fondamental en champ moyen,...etc), il nous est possible de déterminer pour quelle gamme de paramètres la transition de phase

superradiante peut avoir lieu. L'énergie de l'état fondamental dans ce cas précis est :

$$E_G/\hbar N_{at} = (\omega + 4D)x^2 + \omega_0 y^2 + 4\Omega_0 \sqrt{1 - y^2} xy, \quad (3.22)$$

avec $x = \langle a \rangle / \sqrt{N_{at}}$, $y = \langle b \rangle / \sqrt{N_{at}}$. Si dans un premier temps, nous nous contentons de minimiser l'énergie de l'état fondamental par rapport à x , nous obtenons :

$$x = -\frac{2\Omega_0}{\omega} \sqrt{1 - y^2} y, \quad (3.23)$$

qui une fois réinjecté dans (3.22) nous donne l'expression de E_G en terme de y uniquement :

$$E_G/\hbar N_{at} = \left(\omega_0 - 4 \frac{\Omega_0^2}{\omega + 4D} \right) y^2 + 4 \frac{\Omega_0^2}{\omega + 4D} y^4. \quad (3.24)$$

Nous obtenons donc un polynôme en y^4 de la forme $ay^2 + by^4$ et nous savons que ce polynôme possèdera deux minimas non nuls si $a < 0$. Ainsi, l'apparition ou non de la transition de phase est réduite à trouver la gamme de paramètres pour laquelle $\omega_0 - 4\Omega_0^2/(\omega + 4D) < 0$, or nous savons d'après (3.20) que $D = \Omega_0^2/\omega_0 f_{01}$, ce qui nous donne la condition suivante :

$$\Omega_0 > \frac{\sqrt{\omega\omega_0}}{2} \sqrt{\frac{f_{01}}{f_{01} - 1}}. \quad (3.25)$$

En examinant (3.25), nous remarquons que la seconde racine carrée est réelle uniquement si $f_{01} > 1$. Nous en déduisons donc une chose très importante : en présence du terme A^2 , la transition de phase n'est possible que sous condition que $f_{01} > 1$ et dans ce cas le point critique est déplacé par un facteur $\sqrt{f_{01}/(f_{01} - 1)}$.

La question qui se pose alors est : est-il possible d'avoir $f_{01} > 1$? La réponse nous est donnée par la règle de somme TRK (3.15). En effet, la règle de somme TRK nous dit que :

$$\sum_k f_{0k} = 1 \quad (3.26)$$

Or, tous les f_{0k} sont positifs, ainsi nous pouvons en déduire que $f_{01} \leq 1$. En définitive, la règle de somme TRK impose $f_{01} \leq 1$, or nous avons vu que dans ce cas la transition de phase ne peut pas avoir lieu. Ce résultat constitue le "théorème No-go pour les transitions de phase superradiantes" qui interdit donc la transition de phase superradiante dans le

cas d'un ensemble atomique sous de nombreuses hypothèses (Hamiltonien de couplage standard minimal, approximation à un mode, approximation des grandes longueurs d'onde, approximation de systèmes à deux niveaux, approximation d'atomes indépendants). La question de l'influence de ces hypothèses sur l'apparition de la transition de phase superradiante est une question extrêmement importante à laquelle il convient d'apporter quelques éléments de réponse.

Concernant l'hypothèse d'atomes indépendants, la question a déjà partiellement été explorée par les travaux de J. Keeling [79] qui a démontré qu'en ajoutant à l'Hamiltonien (3.21) un terme d'interaction dipôle-diôle (ou pseudospin-pseudospin qui provient d'une interaction atome-atome dans le cas général, ou d'une interaction excitons-excitons dans un gaz d'électrons par exemple), la transition de phase superradiante est possible. L'effet d'un terme d'interaction spin-spin est assez simple à comprendre : nous avons vu dans le chapitre que la transition de phase superradiante consistait pour la partie matière en une transition entre un état dans lequel les spins sont alignés suivant la direction $-z$ en phase normale et un état dans lequel les pseudospins sont alignés suivant la direction $\pm x$ en phase superradiante. Or l'effet du terme d'interaction spin-spin sera, selon son signe, de favoriser l'existence d'une phase ferromagnétique suivant $\pm x$ qui facilitera l'apparition de la phase superradiante ou d'une phase anti-ferromagnétique qui s'opposera à l'apparition de la phase superradiante.

Plus récemment, il a été démontré par Vukics et al. [135, 136] que si l'interaction entre dipôles était prise en compte (interaction atome-atome) ainsi que les conditions aux limites imposées par la cavité, l'Hamiltonien (1.1) n'était pas pertinent pour décrire un ensemble d'atomes placés dans une cavité. Ces travaux généralisent ceux de J. Keeling et montrent qu'en incluant ces considérations et en choisissant convenablement la jauge dans laquelle on se place (dipolaire électrique dans leur cas), il était possible de se ramener à un Hamiltonien de Dicke sans terme A^2 et qu'ainsi la controverse concernant le terme A^2 et le "théorème No-go" associé n'avait pas lieu d'être.

L'effet de modes du champ électromagnétique de fréquence plus élevée a été explorée dans d'autres travaux en taille finie [104] ou en limite thermodynamique [129] (sans terme A^2 dans les deux cas) et montre que l'inclusion de modes supplémentaires et la prise en compte de la variation spatiale des modes ne change pas qualitativement la transition de phase, mais elle peut cependant la modifier quantitativement (couplage critique, comportement des observables). L'inclusion du terme A^2 dans un modèle multi-modes et de leurs variations spatiales serait donc une piste tout à fait intéressante à explorer.

L'approximation des grandes longueurs d'onde a également été étudiée en limite thermo-

dynamique [63] et en taille finie [104] qui sont arrivés à la conclusion que qualitativement, un modèle de Dicke avec couplage non uniforme est équivalent à un modèle de Dicke avec couplage uniforme égal à la moyenne des couplages. Cependant, ce traitement ne tient pas compte du terme A^2 et comprend une approximation de systèmes à deux niveaux. L'approximation de systèmes à deux niveaux n'a quant à elle été questionné que récemment par nous-mêmes [10] ainsi que par Hayn et al. [70] et sera l'objet de la prochaine section.

3.5 Existe-t-il un théorème No-go pour les transitions de phase superradiantes dans le cas d'un ensemble de systèmes à trois niveaux ? [10]

3.5.1 Tentative malheureuse de généralisation du théorème No-go au cas multi niveaux. [134]

Avant de mener la discussion plus loin, il convient d'apporter quelques éclairages sur la controverse qu'il a pu exister au sein de la communauté concernant les transitions de phases superradiantes. Le théorème No-go étant ce qu'il est, bien qu'il repose sur des fondations plutôt fragiles (cf. discussions précédente concernant les approximations), il était admis au sein de la communauté que cela n'avait plus vraiment de sens de travailler sur les transitions de phase superradiantes, puisqu'elles ne peuvent pas avoir lieu dans des systèmes d'atomes en cavité. Puis, une trentaine d'années plus tard des systèmes plus adaptés à l'observation de cette transition de phase sont apparus : les circuits supraconducteurs. Dans ces systèmes, il est en théorie assez aisé d'atteindre le régime de couplage ultra-fort (cf. discussion chapitre circuit-QED), bien que celui-ci reste jusqu'à présent assez peu exploré. Il était donc assez naturel de proposer une implémentation du modèle de Dicke avec des circuits supraconducteurs, que ce soit en considérant des atomes artificiels couplés capacitivement [103] ou inductivement [104] à une ligne de transmission. Cependant, l'analogie entre le couplage capacitif et le couplage dipolaire électrique pourrait laisser penser que le théorème No-go s'applique également aux circuits supraconducteurs [134]. Ce serait oublier que les variables pertinentes pour décrire des atomes en cavité (position, impulsion, champ électrique, charge,...) sont totalement différentes des variables pertinentes pour décrire des circuits supraconducteurs (flux et charge au sein de la ligne de transmission et au sein des atomes artificiels). De plus, la

présence de terme A^2 en cavité est dû à l'invariance de jauge de la théorie, contrairement aux circuits pour lesquels le couplage entre un atome artificiel et la cavité ne se fait pas via un Hamiltonien de couplage standard minimal mais via la procédure décrite dans un précédent chapitre et ne nécessite pas d'invariance de jauge (les équations du mouvement d'un circuit ne doivent pas donner la force de Lorentz comme dans le cas de vrais atomes, elles doivent donner les équations de Kirchoff). Malgré ces considérations, et bien que les arguments de Viehmann et al. aient été remis en cause [34] car erronés, la question reste pertinente et nécessiterait une expérience pour clore la controverse.

En relation avec ce débat Viehmann et. al. se sont tentés, de façon malheureuse, à la généralisation du théorème No-go pour un ensemble de systèmes à deux niveaux, à un ensemble de système multi-niveaux [134]. Bien que leur raisonnement soit correct, une de leurs hypothèse de départ était celle d'une faible excitation de l'ensemble atomique au voisinage du point critique. Cet hypothèse leur a permis de négliger les transitions inter états excités et les a amené à ne considérer que des transitions de l'état fondamental vers des états excités. Bien que cette hypothèse soit totalement justifiée pour des transitions de phase du second ordre lors desquelles le paramètre d'ordre varie continument de 0 à une valeur non nulle au voisinage du point critique, elle ne l'est pas du tout pour des transitions de phase du premier ordre lors desquelles le paramètre d'ordre passe de manière discontinue d'une valeur nulle à une valeur non nulle au point critique rendant l'hypothèse de faible excitation caduque (le paramètre d'ordre du modèle de Dicke est proportionnel au nombre moyen d'excitations atomique dans le fondamental). Ils ont donc montré que les transitions de phase superradiantes du deuxième ordre étaient interdite par la règle de somme TRK, mais en aucun cas celles du premier ordre. Cette remarque nous a donc naturellement amené à considérer le modèle de Dicke avec terme diamagnétique (A^2) en faisant cette fois-ci non pas une approximation de système à deux niveaux mais plutôt une approximation de système à trois niveaux qui va nous permettre avec un minimum d'ingrédients de voir ce qu'il en est des transitions de phase superradiantes du premier ordre.

3.5.2 Modèle et contraintes TRK

La manière la plus simple d'aborder la question de l'approximation de systèmes à deux niveaux avec un minimum d'ingrédients est de considérer un ensemble de systèmes à trois niveaux (qui constituerait en quelques sortes l'ordre suivant d'approximation à n niveaux). Cela a été le sujet de notre article [10], dont nous allons rappeler les résultats

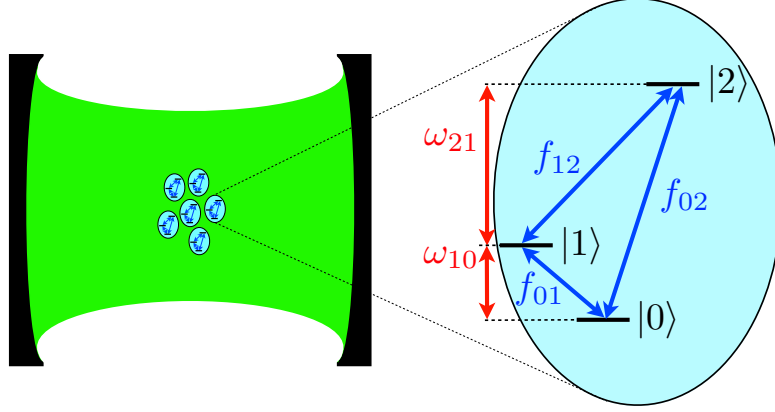


FIGURE 3.1 – Schéma du système de N_{at} systèmes à trois niveaux couplés de manière identique à un unique mode photonique. Chaque système à trois niveaux est décrit par ses fréquences propres $\omega_{10} = \omega_1 - \omega_0 > 0$, $\omega_{21} = \omega_2 - \omega_1 > 0$, $\omega_{20} = \omega_2 + \omega_{10} > 0$ ainsi que par ses forces d'oscillateur $f_{01} \geq 0$, $f_{12} \geq 0$, $f_{02} \geq 0$ (cf. définition (3.20)).

en les étoffants quelque peu de plus de précisions et de discussions.

Considérons un ensemble de N_{at} systèmes à trois niveaux (cf fig. 3.1) notés $\{|0_k\rangle, |1_k\rangle, |2_k\rangle\}$, ($k = 1, 2, \dots, N_{at}$) avec k l'indice atomique, les énergies de ces trois niveaux étant notées $\hbar\omega_0 < \hbar\omega_1 < \hbar\omega_2$. En introduisant les opérateurs de saut collectifs $\hat{\Sigma}_{ij} = \sum_{k=1}^{N_{at}} |i_k\rangle\langle j_k|$ nous pouvons mettre l'Hamiltonien d'interaction lumière-matière sous la forme suivante :

$$\mathcal{H}/\hbar = \omega_{cav}\hat{a}^\dagger\hat{a} + \sum_{j=0}^2 \omega_j \hat{\Sigma}_{jj} + D(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2 + \sum_{\substack{i,j=0 \\ (i \neq j)}}^2 \Omega_{ij} \frac{1}{\sqrt{N_{at}}} (\hat{\Sigma}_{ij} + \hat{\Sigma}_{ji})(\hat{a} + \hat{a}^\dagger). \quad (3.27)$$

L'origine de chacun des termes ayant été discutée précédemment, il convient à présent de considérer les contraintes imposées par la règle de somme TRK ($\sum_j f_{ij} = 1, \forall j$) au sein du sous espace vectoriel $\{|0_k\rangle, |1_k\rangle, |2_k\rangle\}$. Il convient de rappeler que $f_{ij} = -f_{ji} > 0$ si $\omega_j > \omega_i$, nous avons donc choisi de ne faire apparaître que des forces d'oscillateur positives dans les contraintes TRK suivantes :

$$\begin{aligned} \underline{i=0} : f_{01} + f_{02} &\leq 1 \quad , \quad \underline{i=1} : -f_{01} + f_{12} \leq 1 \\ \underline{i=2} : -f_{12} - f_{02} &\leq 1. \end{aligned} \quad (3.28)$$

La contrainte pour $i = 2$ est triviale, la contrainte pour $i = 0$ quant à elle semble plus restrictive que dans le cas d'un ensemble de systèmes à deux niveaux car si $f_{02} \neq 0$ la

force d'oscillateur f_{01} sera encore plus éloignée de 1. Cependant, la plus intéressante des trois inégalités est celle pour $i = 1$ qui peut se réécrire $f_{12} \leq 1 + f_{01}$ et dans ce cas nous voyons qu'il est possible si $f_{01} \neq 0$ d'avoir $f_{12} \geq 1$, or nous avons vu que pour avoir une transition de phase superradiante il était nécessaire que la force d'oscillateur de la transition soit supérieures à 1. Ceci ne constitue pas une preuve directe de la transition de phase mais cependant nous conforte dans l'idée qu'elle est peut-être possible et nous encourage à effectuer une étude plus approfondie de la question.

3.5.3 Transformation de Holstein-Primakoff généralisée.

Nous allons maintenant, comme dans le cas des systèmes à deux niveaux, effectuer une transformation de Holstein-Primakoff sur l'Hamiltonien (3.27). Cependant, comme nous n'avons plus affaire à de simples opérateurs de moments cinétiques mais aux opérateurs $\hat{\Sigma}_{ij}$ qui possèdent des relations de commutation différentes ($[\hat{\Sigma}_{ij}, \hat{\Sigma}_{kl}] = \delta_{jk}\hat{\Sigma}_{il} - \delta_{il}\hat{\Sigma}_{kj}$), cette transformation est légèrement plus compliquée. En effet, il faut choisir un état dit de "référence" (noté r), puis se servir des expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}_{kk} &= \hat{c}_k^\dagger \hat{c}_k \quad (k \neq r) \quad , \quad \hat{\Sigma}_{rr} = N_{at} - \sum_{k \neq r} \hat{c}_k^\dagger \hat{c}_k \\ \hat{\Sigma}_{ir} &= \hat{c}_i^\dagger \sqrt{N_{at} - \sum_{k \neq r} \hat{c}_k^\dagger \hat{c}_k} \quad , \quad \hat{\Sigma}_{ij} = \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_j \quad (i, j \neq r). \end{aligned} \quad (3.29)$$

En appliquant cette transformation à l'Hamiltonien (3.27), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{H}}{\hbar} &= \omega_{cav} \hat{a}^\dagger \hat{a} + \sum_{k \neq r} (\omega_k - \omega_r) \hat{c}_k^\dagger \hat{c}_k + \omega_r N_{at} + D(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2 \\ &+ \left[\sum_{k \neq r} \frac{\Omega_{kr}}{\sqrt{N}} \hat{c}_k^\dagger \sqrt{N - \sum_{l \neq r} \hat{c}_l^\dagger \hat{c}_l} + \sum_{\substack{i > j \\ (i, j \neq r)}} \frac{\Omega_{ij}}{\sqrt{N}} \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_j + h.c. \right] (\hat{a} + \hat{a}^\dagger). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Bien sûr, le choix de l'état de référence r ne va en aucun cas influencer sur nos résultats. Cependant en faisant un choix judicieux, il est possible que les calculs numériques soient facilités. Aux vues des résultats de nos simulations numériques, nous avons choisi comme état de référence l'état $|1\rangle$, ce qui a pour effet de symétriser le problème (l'état $|1\rangle$ étant

situé entre l'état $|0\rangle$ et l'état $|2\rangle$). Ainsi l'Hamiltonien (3.30) devient :

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{H}}{\hbar} = & \omega_{cav} \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_{01} \hat{c}_0^\dagger \hat{c}_0 + \omega_{21} \hat{c}_2^\dagger \hat{c}_2 + \omega_r N_{at} + D(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2 \\ & + \left[\frac{\Omega_{01} \hat{c}_0^\dagger + \Omega_{21} \hat{c}_2^\dagger}{\sqrt{N_{at}}} \sqrt{N - \hat{c}_0^\dagger \hat{c}_0 - \hat{c}_2^\dagger \hat{c}_2} + \frac{\Omega_{20}}{\sqrt{N_{at}}} \hat{c}_0^\dagger \hat{c}_2 + h.c. \right] (\hat{a} + \hat{a}^\dagger). \end{aligned} \quad (3.31)$$

3.5.4 Méthode de détermination du diagramme de phase

Nous avons vu au chapitre précédent qu'une transition de phase quantique était liée à une propriété singulière de l'état fondamental. Aussi, nous allons étudier le comportement de l'énergie de celui-ci en champ moyen (qui est exact en limite thermodynamique $N_{at} \rightarrow \infty$). Nous allons procéder de la même manière que pour le modèle de Dicke habituel en introduisant la valeur moyenne de chacun des champs bosoniques ($\langle a \rangle = \langle a^\dagger \rangle = x\sqrt{N_{at}}$, $\langle c_0 \rangle = \langle c_0^\dagger \rangle = y\sqrt{N_{at}}$, $\langle c_2 \rangle = \langle c_2^\dagger \rangle = z\sqrt{N_{at}}$) dans l'Hamiltonien (3.31) afin d'obtenir la valeur moyenne de l'énergie de l'état fondamental (en champ moyen) :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_G(x, y, z) = \frac{E_G/\hbar}{N_{at}} = & (\omega_{cav} + 4D)x^2 + \omega_{01}y^2 + \omega_{21}z^2 + \omega_1 \\ & + 4x \left[(\Omega_{10}y + \Omega_{21}z)\sqrt{1 - y^2 - z^2} + \Omega_{20}yz \right]. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Nous choisissons ici de prendre x comme paramètre d'ordre (la phase superradiante étant définie comme celle dans laquelle une cohérence photonique apparaît). Ainsi, afin d'obtenir le diagramme de phase associé, il convient de trouver les gammes de paramètres intéressantes pour lesquelles l'état fondamental possède une cohérence photonique non nulle. Nous tenons à rappeler qu'afin de trouver l'énergie de l'état fondamental, il convient de minimiser \mathcal{E}_G par rapport à x , y et z . Or, la dérivée seconde de \mathcal{E}_G étant positive ($\partial^2 \mathcal{E}_G / \partial x^2 = \omega_{cav} + 4D$), si nous trouvons un minimum pour x , ce sera un minimum global. Ainsi une première minimisation de \mathcal{E}_G par rapport à x nous permet d'obtenir l'expression de cette variable par rapport à y et z :

$$x = -\frac{2}{\omega_{cav} + 4D} \left[(\Omega_{10}y + \Omega_{21}z)\sqrt{1 - y^2 - z^2} + \Omega_{20}yz \right]. \quad (3.33)$$

Ainsi, nous obtenons une nouvelle expression de l'énergie de l'état fondamental, dépendant de y et z seulement cette fois-ci :

$$\mathcal{E}_G = \omega_{01}y^2 + \omega_{21}z^2 + \omega_1 - \frac{4}{\omega_{cav} + 4D} \left[(\Omega_{10}y + \Omega_{21}z)\sqrt{1 - y^2 - z^2} + \Omega_{20}yz \right]^2. \quad (3.34)$$

La formulation de la transformation de Holstein-Primakoff généralisée (3.29) impose $y^2 + z^2 \leq 1$ (car $N_{at}(y^2 + z^2)$ représente la valeur moyenne du nombre d'excitations atomiques qui ne peut pas excéder le nombre d'atomes N_{at}). Donc finalement le problème de minimisation de l'énergie du fondamental, revient à chercher le minimum de la fonction (3.34) dans le plan (y, z) au sein du disque de centre 0 et de rayon 1.

3.5.5 Diagramme de phase dans différents cas

Comme nous avons considéré un ensemble de systèmes à trois niveaux, il y a plusieurs cas de figure intéressants à considérer. Il y a notamment plusieurs configurations différentes qui peuvent être considérées (configuration en échelle, configuration en V, configuration en Λ) du fait de certaines règles de sélection. Par soucis de clarté, nous allons analyser chacune de ces configurations pour ensuite considérer le cas général (sans règle de sélection).

Configuration en échelle

Considérons, pour commencer, la configuration en échelle (cf. fig. 3.2) pour laquelle la transition entre les niveaux $|0\rangle$ et $|2\rangle$ n'est pas couplée à la lumière ($f_{02} = 0$). Dans ce cas, il est possible d'avoir une transition de phase entre états excités [112, 27], du fait de la contrainte TRK (3.28) pour $i = 1$ ($f_{12} \leq 1 + f_{01}$) qui permet à la force d'oscillateur f_{12} d'être supérieure à 1. Cette transition de phase entre états excités sera ainsi le précurseur de la transition de phase quantique (définie comme un changement des propriétés de l'état fondamental).

En effet, afin de comprendre ce qu'il se passe, considérons le cas où la transition entre les niveaux $|1\rangle$ et $|2\rangle$ est couplée à la lumière par l'intermédiaire de la force d'oscillateur $f_{12} > 1$ tandis que $f_{01} = 0$ (le choix de ces forces d'oscillateurs n'est bien sûr pas compatible avec la règle de somme TRK mais sert simplement à la discussion). A partir d'un certain couplage lumière-matière les niveaux $|1\rangle$ et $|2\rangle$ vont commencer à s'hybrider avec la lumière ainsi qu'entre eux pour former un nouvel état qui va abaisser leur énergie commune (plus le couplage lumière-matière sera important, plus leur énergie commune

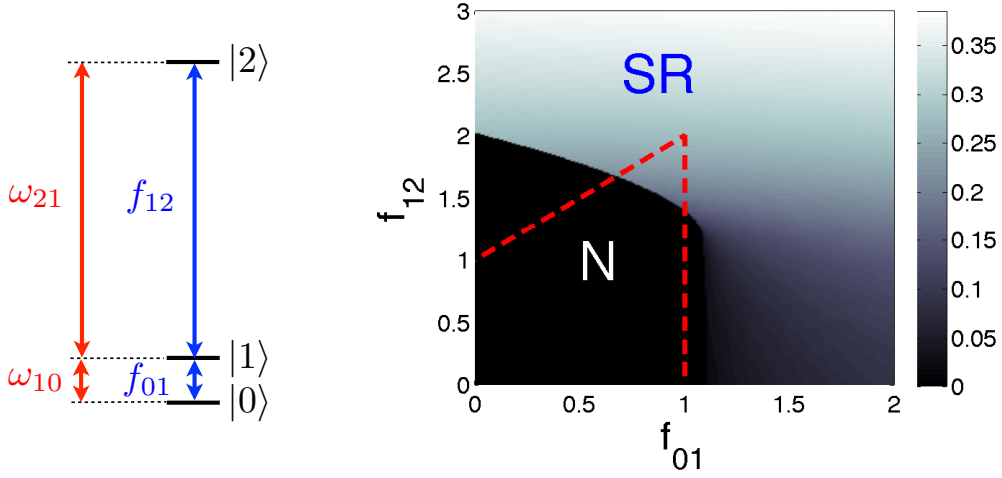


FIGURE 3.2 – Résultat pour la configuration en *échelle* ($f_{02} = 0$). Paramètre d'ordre photonique $x = \langle a \rangle / \sqrt{N}$ de l'état fondamental en fonction de f_{01} et f_{12} . Les contraintes TRK (3.28) sont vérifiées dans la région située à l'intérieur des lignes rouges en pointillé. Paramètres : $D = 3\omega_{cav}$, $\omega_{10} = 0.1\omega_{cav}$, $\omega_{21} = \omega_{cav}$.

sera faible), puis une fois un certain couplage atteint (le couplage critique) l'énergie de cet état hybride va devenir inférieure à l'énergie de l'état $|0\rangle$. Ainsi, l'état fondamental du système ne sera plus l'état $|0\rangle$, mais sera l'état hybride qui possède déjà une cohérence atomique (raison pour laquelle la transition de phase quantique sera d'ordre 1).

Cependant, tout en respectant la règle de somme TRK, il n'est pas possible de fixer $f_{01} = 0$ tout en ayant une transition de phase entre états excités (car si $f_{01} = 0$, $f_{12} = 1$ au maximum ce qui n'est pas suffisant). C'est pourquoi, dans la figure 3.2, nous voyons qu'en réalité dans la gamme de paramètre compatible avec TRK les forces d'oscillateur sont telles que $f_{01} \neq 0$ et $f_{12} > 1$. Dans ce cas, il n'y aura pas de croisement de niveaux comme dans le cas discuté précédemment mais plutôt un anti-croisement (ou évitement).

Configuration en Λ

Considérons à présent la configuration en Λ (cf. fig. 3.3) pour laquelle la transition entre les niveaux $|0\rangle$ et $|1\rangle$ n'est pas couplée à la lumière ($f_{01} = 0$). Pour cette configuration, les contraintes TRK ($f_{02} \leq 1$ et $f_{12} \leq 1$) semblent ne pas être favorables à la transition de phase. Cependant, en y regardant de plus près, les deux transitions contribuent à peupler le même niveau excité (le niveau $|2\rangle$), de plus les contraintes TRK sont moins

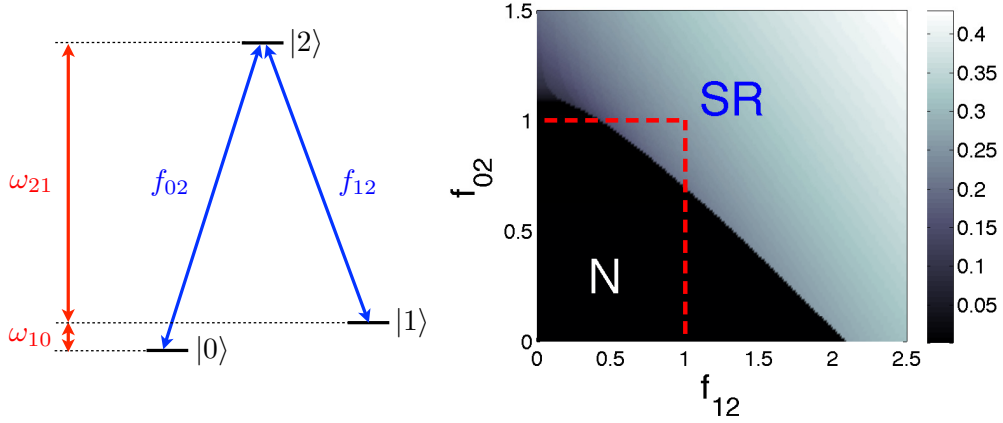


FIGURE 3.3 – Configuration en Λ ($f_{01} = 0$). Paramètre d'ordre photonique en fonction de f_{12} et f_{02} . Paramètres : $D = 3\omega_{cav}$, $\omega_{10} = 0.1\omega_{cav}$, $\omega_{21} = 0.9\omega_{cav}$.

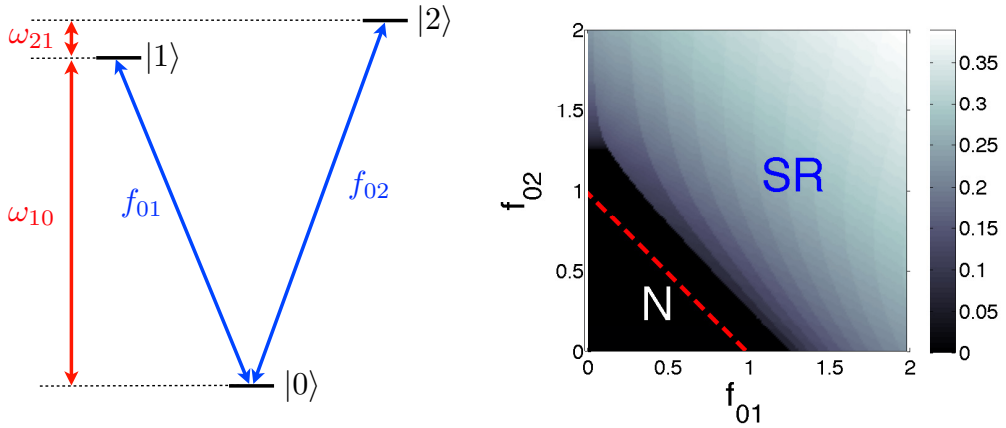


FIGURE 3.4 – Configuration en V ($f_{12} = 0$). Paramètre d'ordre photonique en fonction de f_{01} et f_{02} . Paramètres : $D = \omega_{cav}$, $\omega_{10} = \omega_{cav}$, $\omega_{21} = 0.1\omega_{cav}$. Dans cette configuration, la transition de phase superradiante n'est jamais compatible avec les contraintes TRK.

drastiques que pour la configuration en échelle. Ainsi, nous pouvons voir sur la figure 3.3 que la transition de phase peut avoir lieu pour des valeurs de f_{02} et f_{12} proches de 1, ce à quoi nous pouvons nous attendre compte tenu des arguments précédents.

Configuration en V

Considérons pour finir la configuration en V (cf. fig. 3.4) pour laquelle la transition entre les niveaux $|1\rangle$ et $|2\rangle$ est interdite ($f_{12} = 0$). Dans cette configuration, la transition

entre niveaux excités n'est pas couplée à la lumière et il ne peut y avoir d'hybridation entre niveaux excités, qui serait le précurseur d'une transition de phase quantique du premier ordre comme dans la configuration en échelle par exemple. En négligeant les transitions entre états excités, Viehmann et al. ont considéré une généralisation de cette configuration au cas multi-niveaux (un ensemble de configuration en V couplées à un mode photonique), il est donc tout à fait logique de ne pas trouver de gamme de paramètre pour laquelle la transition de phase serait compatible avec la règle de somme TRK (cf. fig. 3.4)

Configuration générale

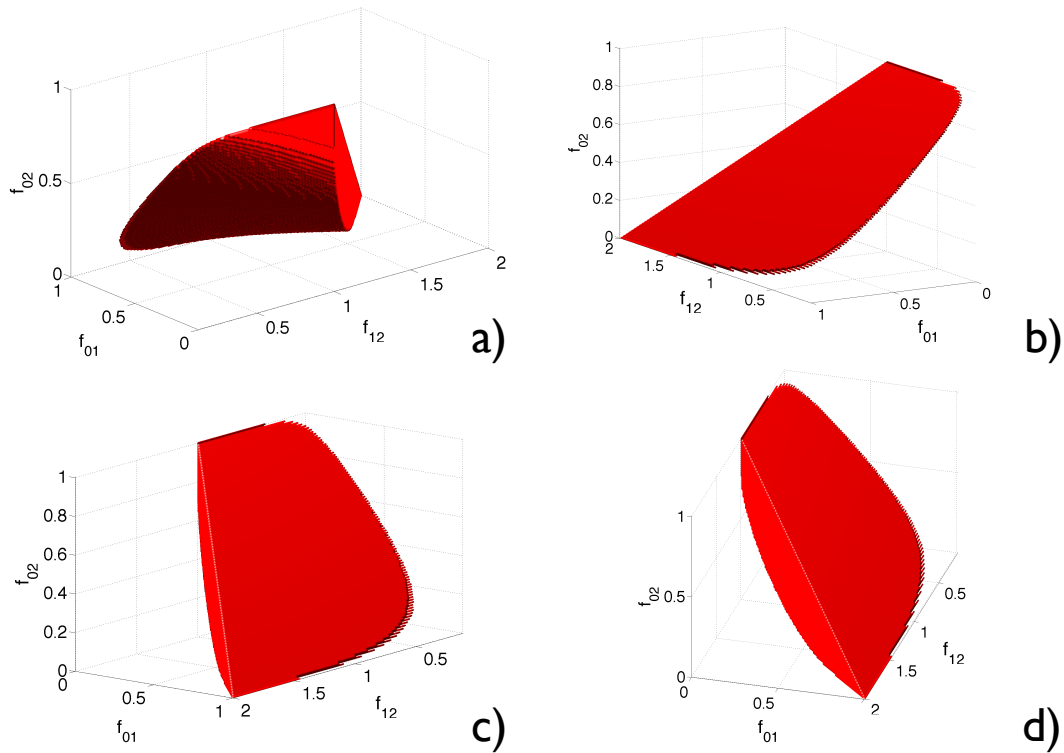


FIGURE 3.5 – Résultats pour la configuration générale. Volume dans lequel les contraintes TRK sont vérifiées et le système se trouve en phase superradiante. Paramètres : $D = 5\omega_{cav}$, $\omega_{10} = 0.17\omega_{cav}$, $\omega_{21} = \omega_{cav}$.

En ayant bien compris ce qu'il se passait dans les trois cas limites précédents, il convient à présent de s'intéresser au cas d'une configuration générale (en imposant aucune règle de sélection). Dans ce cas, la seule façon d'avoir une intuition de ce qu'il se passe

est d'essayer de se raccrocher aux cas limites précédents. Nous avons représenté sur la figure 3.5 le volume à l'intérieur duquel le système se trouve en phase superradiante et les contraintes TRK sont vérifiées. Nous remarquons que l'ensemble des points pour lesquels le système peut se trouver en phase superradiante occupe une portion assez grande de l'espace dans lequel les contraintes TRK sont vérifiées.

Notre travail démontre alors que la transition de phase superradiante est possible à condition de trouver un potentiel $V(\mathbf{r})$ tel que l'Hamiltonien atomique possède des forces d'oscillateur compatibles avec la transition de phase et soit un bon système à trois niveaux. Une nouvelle question se pose alors de manière assez naturelle : Est-il possible de trouver un tel potentiel atomique ? En d'autres termes, nous avons identifié les conditions nécessaires et suffisantes pour que la transition de phase superradiante puisse avoir lieu, il nous reste alors à identifier la classe (ou au moins un élément de cette classe) de potentiels qui satisfont à ces conditions.

3.5.6 Problème de Schrödinger inverse

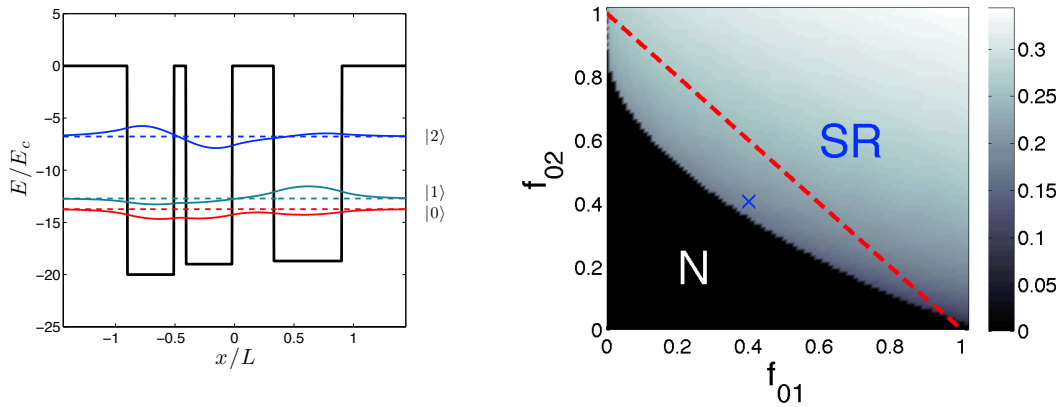


FIGURE 3.6 – Figure de droite : paramètre d'ordre photonique x en fonction de f_{01} et f_{02} pour $f_{12} = 0.735$. La région au dessous de la ligne pointillé rouge correspond à la région de compatibilité avec la règle de somme TRK. Figure de gauche : Exemple de potentiel 1D composé de puits (en noir) en unité de l'énergie $E_c = \frac{\hbar^2}{2mL^2}$. L'axe des abscisses est exprimé en unité de la longueur total du potentiel L . les ligne pleines en couleur correspondent aux fonctions d'onde des trois premiers états d'énergie (les autres états d'énergie sont situés dans le continuum). Le traits horizontaux pointillées correspondent aux énergies propres des états. Pour ce potentiel, les forces d'oscillateur sont $f_{01} = 0.3995$, $f_{02} = 0.4069$, $f_{12} = 0.735$ et l'anharmonicité de $\omega_{10}/\omega_{21} = 0.1709$ ce qui correspond à la croix bleue sur la figure de droite.

Le problème que nous souhaitons résoudre est en quelques sortes un problème de Schrödinger inverse : habituellement, on souhaite trouver les fonctions propres et les valeurs propres d'un Hamiltonien donné ce qui est un problème déjà très compliqué puisqu'il résume la majeure partie de l'activité des physiciens théoriciens depuis l'avènement de la physique quantique au début du 20ème siècle. Dans notre problème cependant nous souhaiterions faire l'inverse : imposer certaines propriétés (les forces d'oscillateur qui sont liés aux états propres, et le spectre) et trouver un ou des potentiels qui satisfont à ces propriétés. Malheureusement, il n'existe pas de méthode réellement efficace pour attaquer ce problème et pour ainsi dire aucune référence dans la littérature. Nous avons donc procédé de la manière suivante : nous avons cherché, avec un minimum d'ingrédients, un potentiel pour lequel l'approximation de système à 3 niveaux était valable, possédant de bonnes forces d'oscillateurs. Ainsi, nous avons naturellement été amenés à considérer un des potentiel les plus simples mathématiquement parlant : un potentiel à N puits unidimensionnel dont nous avons fait varier les largeurs et profondeurs relatives. Ainsi, pour maximiser l'anharmonicité, avoir des forces d'oscillateur f_{01} et f_{02} proches de 1 ainsi que f_{12} proche de 2, nous avons choisi de minimiser la fonction $F = (\omega_{21}/\omega_{32} - \alpha)^2 + (f_{01} - 1)^2 + (f_{02} - 1)^2 + (f_{12} - 2)^2$ avec α l'anharmonicité que nous souhaitons atteindre. Pour cela nous avons utilisé un algorithme de descente, qui cherche le minimum de la fonction F en fonction des paramètres du potentiel à N puits. En d'autres termes, en input de la fonction il y a les paramètres du potentiel (largeurs et hauteurs relatives) et en output il y a la valeur de F . Ainsi en faisant varier les paramètres en input, le programme peut chercher un minimum de la fonction F . Bien sûr, rien n'assure que le programme va trouver le minimum global de la fonction, il peut très bien rester coincé dans un minimum local ce qui implique que la solution qu'il va nous proposer va fortement dépendre de la condition initiale qu'on impose. En pratique, cela demande beaucoup de patience et de persévérance car la fonction à minimiser ne semble pas du tout régulière. Le meilleur potentiel que nous avons trouvé est dessiné sur la figure 3.6 et n'est pas tout à fait une réussite indéniable : le spectre n'est pas suffisamment anharmonique (le troisième niveau est trop proche du continuum), cependant il possède de bonnes forces d'oscillateur comme nous pouvons le voir sur la figure 3.6 qui montre qu'avec de telles forces d'oscillateur, la transition de phase est possible. Ce résultat pourrait être amélioré en ne restreignant pas la recherche à des potentiels à la fois unidimensionnels et composés de puits.

3.6 Théorème No-go en circuit-QED

En raison de la forte analogie entre cavity- et circuit-QED il est naturel de se demander si un tel théorème n'existe pas également pour les transitions de phase superradiantes en circuit-QED. Pour un ensemble de CPB, il a été démontré [103], en utilisant une procédure de recherche de l'Hamiltonien du système semblable au couplage standard minimal, que l'amplitude du terme A^2 n'était pas contrainte aussi fortement que dans le cas de la cavity-QED et pouvait être rendue insignifiante, notamment dans le régime CPB ($E_c \gg E_J$). Il est cependant possible de mettre en cause la démarche de recherche de l'Hamiltonien du système. Montrons alors qu'en appliquant la procédure décrite dans le chapitre d'introduction à la circuit-QED en même temps que la procédure décrite sur la figure 3.7, il est possible d'atteindre des couplages lumière-matière tels que le système se trouve en phase superradiante. Pour faire cela, nous allons considérer un ensemble de N_{at} CPB couplées capacitivement à une ligne de transmission et situées dans une région de taille faible (par rapport à la longueur d'onde du premier mode de charge), proche d'une des extrémités ($x \approx \pm d/2$) et appliquer la procédure de la figure 3.7 pour trouver les quantités renormalisées :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{circ} = \sum_i \{ E_{C_r}'' (N_r^i)^2 + E_{L_r} (\varphi_r^{i+1} - \varphi_r^i)^2 \} + G \sum_{j=1}^{N_{at}} N_J^j N_r^{k_j+1} \\ + E_{C_F}' (N_J^j - n_g)^2 - E_J \cos(\varphi_J^j), \end{aligned} \quad (3.35)$$

avec, (en ayant calculé $C_\Sigma^2 = C_g C_J + C_g C_r / M + C_J C_r / M$) :

$$\begin{aligned} E_{C_r}'' = 2e^2 \frac{1}{C_r''} \quad E_{L_r} = \left(\frac{\hbar}{2e} \right)^2 \frac{1}{2L_r} \\ G = -4e^2 \frac{C_g}{C_\Sigma^2} \quad E_{C_F}' = 2e^2 \frac{1}{C_F'}, \end{aligned} \quad (3.36)$$

les k_j représentant les positions des atomes indicés par j au sein de la ligne de transmission. Les capacités renormalisées de la CPB et de la ligne de transmission sont données par :

$$\begin{aligned} C_r'' = C_r + N_{at} \left(\frac{C_g C_J}{C_g + C_J} - \frac{C_r}{M} \right) \\ C_F' = C_g + C_J + C_g \left(\frac{C_r / M}{C_g + C_r / M} - 1 \right). \end{aligned} \quad (3.37)$$

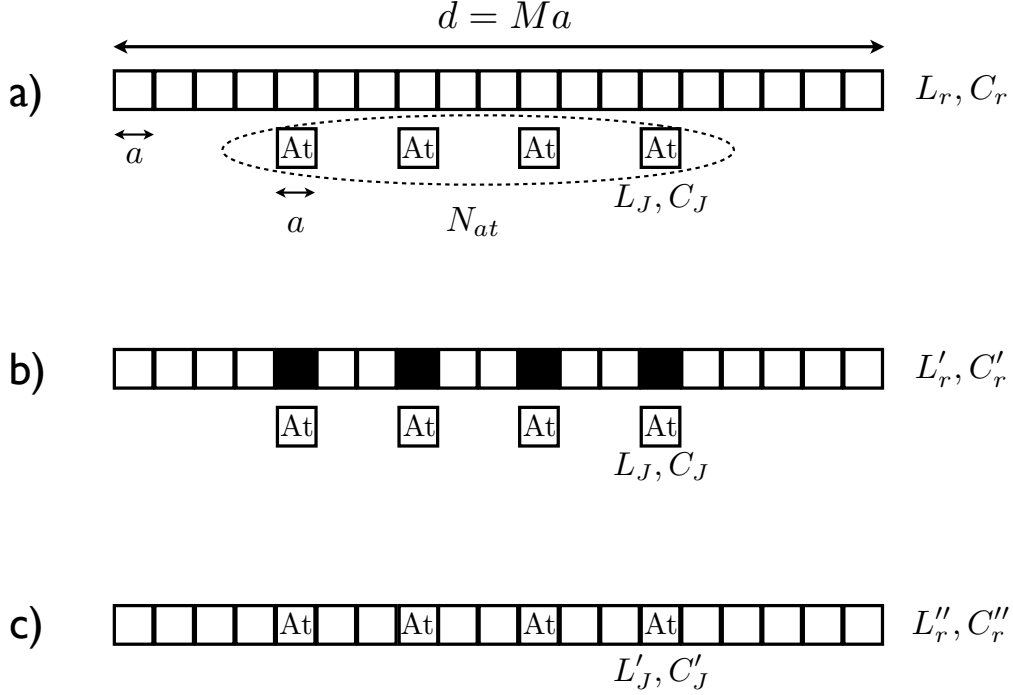


FIGURE 3.7 – Pour déterminer de quelle manière sont modifiés les paramètres de la ligne de transmission et des atomes lorsque ceux-ci sont couplés, il convient de :

(a) découper la ligne de transmission de longueur d en M portions de même taille que la taille des atomes (a), i.e. $d = Ma$ ayant chacun une inductance L_r/M et une capacité C_r/M .

(b) Retirer un nombre de portions égale au nombre d'atomes que nous souhaitons introduire au sein de la ligne de transmission ce qui va modifier les inductances et capacités totales des lignes de transmission $L'_r = L_r(M - N_{at})/M$ et $C'_r = C_r(M - N_{at})/M$.

(c) Introduire les atomes au sein de la ligne de transmission ce qui va modifier l'inductance totale de la ligne de transmission (L''_r) ainsi que les inductances propres des atomes (L'_F) si les atomes sont couplés inductivement, et/ou la capacité totale de la ligne de transmission (C''_r) ainsi que les capacités propres des atomes (L'_F et C'_F , cf. texte) si ceux-ci sont couplé capacitivement.

En appliquant une approximation à un mode à la ligne de transmission et une approximation de systèmes à deux niveaux aux CPB, nous obtenons un Hamiltonien de la forme :

$$\mathcal{H}_{circ}/\hbar = \tilde{\omega}\hat{a}^\dagger\hat{a} + \omega_0\hat{J}_z + \frac{\Omega}{\sqrt{N_{at}}}(\hat{J}_+ + \hat{J}_-)(\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad (3.38)$$

avec $\tilde{\omega} = \pi/\sqrt{L_r C_r''}$ la fréquence renormalisée et $C_r'' = C_r + N_{at}(C_g C_J/(C_g + C_J) - C_r/M)$ la capacité renormalisée de la ligne de transmission, $\omega_0 = E_J$ la fréquence de transition entre les deux premiers états de la CPB opérée au sweet spot (cf. chapitre circuit-QED) et un couplage lumière-matière égale à :

$$\Omega = \sqrt{N_{at}\tilde{\omega}} \frac{C_g C_r''}{C_\Sigma^2} \sqrt{\frac{Z''}{Z_{vac}}}. \quad (3.39)$$

Nous remarquons qu'il n'y a pas de terme proportionnel à $(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2$ qui serait l'analogue du terme A^2 en circuit QED. La question de la possibilité ou non d'obtenir des états fondamentaux ayant des propriétés originales tels que ceux décrits précédemment dans le cadre du Modèle de Dicke, (i.e. de pouvoir observer ou non une transition de phase superradiante) se réduit alors à savoir si il est possible, en choisissant convenablement les paramètres du circuit, d'atteindre un couplage lumière-matière tel que :

$$\Omega > \sqrt{\tilde{\omega}\omega_0}/2. \quad (3.40)$$

Dans le cas de la CPB, comme la fréquence des atomes est indépendante du nombre d'atomes N_{at} , il est possible de placer ceux-ci à résonance avec la premier mode de cavité ($\tilde{\omega} = \omega_0$), la condition 3.40 se réduit alors à : $\Omega/\tilde{\omega} > 1/2$. Or, en choisissant les capacités C_g , C_J et C_r telles que $C_g C_J/(C_g + C_J) \approx C_r/M$, nous aurons $C_r'' \approx C_r$ qui ne dépendra plus de N_{at} , ce qui entraînera $Z'' \approx Z$ et $\tilde{\omega} \approx \omega$. L'équation (3.39) se réduit alors à :

$$\Omega/\omega = \sqrt{N_{at}} \frac{C_g C_r}{C_\Sigma^2} \sqrt{\frac{Z}{Z_{vac}}}, \quad (3.41)$$

et nous voyons que le rapport $\Omega/\tilde{\omega} \propto \sqrt{N_{at}}$ et peut être arbitrairement important. Nous en déduisons donc que pour un ensemble de CPB couplées capacitivement à une ligne de transmission, il n'existe pas de "théorème No-go". Il est possible de faire le même genre de raisonnement pour un ensemble de Fluxoniums couplés inductivement à une ligne de transmission et d'arriver à la même conclusion. Il n'existe donc pas de "théorème No-go"

pour les transitions de phase superradiantes en circuit-QED.

Chapitre 4

Modèle de Dicke avec symétrie discrète (\mathbb{Z}_2) ou continue ($U(1)$) contrôlable en circuit-QED [9].

Les modèles de Dicke auxquels nous avons eu affaire jusqu'à présent possèdent des symétries discrète de type \mathbb{Z}_2 dont le fondamental en limite de couplage ultrafort était un état de type chat de Schrödinger. Cependant, cette symétrie particulière, bien qu'elle soit imposée par les symétries de la nature dans le cas du couplage dipolaire électrique, ne l'est pas dans le cas des circuits supraconducteurs qu'il faut opérer à leur "sweet spot" pour avoir cette symétrie. De plus, bien que le couplage dipolaire électrique soit des ordres de grandeurs plus important que le couplage dipolaire magnétique en physique atomique, cette différence n'est pas aussi marquée pour les circuits supraconducteurs dans lesquels en choisissant judicieusement les paramètres de la ligne de transmission et des atomes artificiels, il est possible d'avoir des couplages inductif et capacitif du même ordre de grandeur. Cette différence majeur entre la physique atomique et les circuits permet de généraliser le modèle de Dicke et de lui conférer une symétrie continue de type $U(1)$ en faisant disparaître soit les termes résonants, soit les termes anti-résonnants, lorsque les couplages inductif et capacitif sont de même amplitude et de même signe ou de signe opposé respectivement, même en limite de couplage ultrafort dans laquelle ces termes ne peuvent plus être négligés. Ce nouveau type de symétrie est extrêmement intéressant car elle donne lieu en limite thermodynamique à l'apparition d'un mode de Goldstone accompagné par un mode d'amplitude en raison de la brisure spontanée de symétrie continue $U(1)$, ce qui n'est pas sans rappeler le mécanisme de Higgs-Anderson [4, 74]. De

plus, ce groupe de symétrie incluant tous les sous-groupes \mathbb{Z}_k (i.e. des rotations d'angle $2\pi/k$), il est possible en taille finie d'obtenir des chats de Schrödinger à k lobes (i.e. $2k$ pattes) en appliquant au système une perturbation du type $\epsilon((\hat{a})^k + (\hat{a}^\dagger)^k)$ ($\epsilon \ll \omega, \omega_0, g$).

4.1 Symétrie de l'interaction lumière-matière en cavity-QED et en circuit-QED.

Pour commencer la discussion, considérons l'Hamiltonien de Rabi qui pour rappel est le suivant :

$$\mathcal{H}_{Rabi}/\hbar = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\omega_0}{2} \hat{\sigma}_z + g(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-)(\hat{a} + \hat{a}^\dagger). \quad (4.1)$$

Cet Hamiltonien, comme nous l'avons déjà dit possède une symétrie discrète de type \mathbb{Z}_2 . Cependant, il est très intéressant de remarquer qu'il existe deux types de termes au sein du couplage lumière-matière : les termes dits "anti-résonnants" ($\hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger + \hat{\sigma}_- \hat{a}$) d'une part et les termes dits "résonnants" d'autre part ($\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger$). Chacun de ces termes pris séparément possède une symétrie continue de type $U(1)$, bien que cette symétrie ne soit pas la même pour les termes résonnants et les termes anti-résonnants. En effet, les termes résonnants préservent le nombre d'excitations dans le système ($\hat{N}_{exc} = (\hat{\sigma}_z + \mathbb{1})/2 + \hat{a}^\dagger \hat{a}$) car ils créent une excitation photonique (atomique) en annihilant une excitation atomique(photonique). Les termes anti-résonnants quant à eux préservent la différence entre le nombre d'excitations atomiques et le nombre d'excitations photoniques ($\Delta \hat{N}_{exc} = (\hat{\sigma}_z + \mathbb{1})/2 - \hat{a}^\dagger \hat{a}$) car ils créent ou annihilent simultanément deux excitations : une excitation photonique et une excitation atomique. Nous avons par conséquent, préservation dans le cas des termes anti-résonnants de la symétrie $\hat{U}_{a-r} = \exp[i\theta(\hat{a}^\dagger \hat{a} - (\hat{\sigma}_z + \mathbb{1})/2)]$ et dans le cas des termes résonnants de la symétrie $\hat{U}_r = \exp[i\theta(\hat{a}^\dagger \hat{a} + (\hat{\sigma}_z + \mathbb{1})/2)]$. Considérons alors les deux Hamiltoniens suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{a-r}/\hbar &= \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\omega_0}{2} \hat{\sigma}_z + g(\hat{\sigma}_- \hat{a} + \hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger) \\ \mathcal{H}_r/\hbar &= \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\omega_0}{2} \hat{\sigma}_z + g(\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger), \end{aligned} \quad (4.2)$$

L'Hamiltonien \mathcal{H}_{a-r} possède la symétrie \hat{U}_{a-r} qui transforme les opérateurs qui le composent de la manière suivante :

$$\hat{U}_{a-r}^\dagger(\hat{a}, \hat{a}^\dagger, \hat{\sigma}_-, \hat{\sigma}_+) \hat{U}_{a-r} = (\hat{a}e^{-i\theta}, \hat{a}^\dagger e^{i\theta}, \hat{\sigma}_- e^{-i\theta}, \hat{\sigma}_+ e^{i\theta}). \quad (4.3)$$

L'Hamiltonien \mathcal{H}_r , quant à lui, possède la symétrie \hat{U}_r :

$$\hat{U}_r^\dagger(\hat{a}, \hat{a}^\dagger, \hat{\sigma}_-, \hat{\sigma}_+) \hat{U}_r = (\hat{a}e^{i\theta}, \hat{a}^\dagger e^{-i\theta}, \hat{\sigma}_- e^{i\theta}, \hat{\sigma}_+ e^{-i\theta}). \quad (4.4)$$

Ainsi, nous voyons que si nous étions capables de faire disparaître soit les termes résonnants soit les termes anti-résonnants, plutôt que d'avoir une symétrie discrète, l'Hamiltonien aurait une symétrie continue (i.e. dépendant d'un paramètre continu qui est ici θ).

Avant de mener la discussion plus loin, il est bon de se demander quel est l'origine du terme de couplage $(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-)(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$ qui entraîne une symétrie \mathbb{Z}_2 pour l'Hamiltonien de Rabi. En physique atomique, ce terme résulte du couplage standard minimal $(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2$ qui donne lieu à un couplage du type $\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}$ qui peut être transformé (cf. chapitre précédent) en $\hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{A}}$. Le potentiel vecteur une fois quantifié est de la forme $\mathbf{A}_0(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$ tandis que l'opérateur dipôle (dans le sous espace des deux états de plus basse énergie de l'Hamiltonien atomique) est de la forme $\hat{\mathbf{d}} = \mathbf{d}_0(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-)$ et ne possède pas de termes diagonaux qui correspondraient à des dipôles permanents qui ne peuvent pas exister au sein d'atomes réels pour des raisons de symétrie. Nous voyons donc qu'en physique atomique la symétrie \mathbb{Z}_2 est imposée par des symétries physiques ayant une origine profonde (invariance de jauge de la théorie de l'électrodynamique) et il n'est à priori pas facile de la modifier.

En circuit-QED en revanche, comme nous l'avons vu précédemment, le couplage des qubits supraconducteurs à la ligne de transmission n'aura cette forme que dans certains cas précis pour lesquels l'équivalent du potentiel atomique (i.e. la partie de l'Hamiltonien qui ne dépend que des variables $\hat{\varphi}_i$) possède une symétrie de parité. Ainsi, nous voyons que les circuits offrent plus de liberté et n'imposent pas cette forme de couplage qui n'aura lieu que pour des jeux de paramètres précis ($\varphi_{ext} = \pi$ par exemple ou $n_g = k + 1/2$ ($k \in \mathbb{Z}$)). De plus en circuit-QED comme nous en avons déjà discuté, il peut exister deux types de couplage (inductif ou capacitif) qui auront une forme du type $\hat{\varphi}_i(\partial_x \hat{\varphi}_r(x_i))$ pour le couplage inductif ou du type $\hat{N}_i \hat{N}_r(x_i)$ pour le couplage capacitif. En choisissant d'opérer les atomes artificiels à leurs "sweet spot" ces couplages se mettront sous la forme $(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-)(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$ pour le couplage inductif et $(\hat{\sigma}_+ - \hat{\sigma}_-)(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)$ pour le couplage capacitif. Pris séparément chacun de ces termes possède à nouveau une symétrie \mathbb{Z}_2 discrète. En

revanche, si il état possible de coupler un qubit à la fois inductivement et capacitivement à la ligne de transmission nous aurions alors l'Hamiltonien suivant :

$$\mathcal{H}/\hbar = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_0 \hat{\sigma}_z + g_E(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-)(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) + g_M(\hat{\sigma}_+ - \hat{\sigma}_-)(\hat{a} - \hat{a}^\dagger). \quad (4.5)$$

Essayons de le réécrire en mettant en évidence les termes résonants et anti-résonnants :

$$\mathcal{H}/\hbar = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_0 \hat{\sigma}_z + (g_E + g_M)(\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger) + (g_E - g_M)(\hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger + \hat{\sigma}_- \hat{a}). \quad (4.6)$$

Avec un tel Hamiltonien il serait possible de choisir les poids relatifs des termes résonnants et anti-résonnants. Il existe de plus, deux cas très intéressants : les cas pour lequel $g_E = g_M$ car alors l'Hamiltonien se réduit à \mathcal{H}_r et possède une symétrie \hat{U}_r , mais également le cas $g_E = -g_M$ car alors l'Hamiltonien sera réduit à \mathcal{H}_{a-r} et possèdera une symétrie \hat{U}_{a-r} . Ainsi, nous voyons qu'il serait possible de contrôler la symétrie de cet Hamiltonien et avoir selon la valeur relative des couplages inductif et capacitif soit une symétrie discrète de type \mathbb{Z}_2 soit une symétrie continue de type $U(1)$.

La question qui vient alors à l'esprit est : comment coupler un qubit supra à la fois inductivement et capacitivement à une ligne de transmission ? C'est ce que nous proposons de faire en couplant un qubit de type flux (RF-squid ou Fluxonium) de manière à la fois inductive et capacitive à une ligne de transmission (cf. fig. 4.1).

4.2 Hamiltonien d'un qubit couplé à la fois capacitive-ment et inductivement à une ligne de transmission

Le qubit est placé au sein de la ligne de transmission à la position x_k comme présenté sur la figure 4.1. L'Hamiltonien décrivant ce système est trouvé en appliquant la procédure de recherche décrite plus haut, le résultat (en considérant un modèle de type "lumped-elements" pour la ligne de transmission) est le suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{circ} = \sum_i \{ & E''_{C_r} (N_r^i)^2 + E''_{L_r} (\varphi_r^{i+1} - \varphi_r^i)^2 \} + G_C N_J N_r^{k+1} + G_L \varphi_J (\varphi_r^{k+1} - \varphi_r^k) \\ & + E'_{C_F} (N_J)^2 + E'_{L_F} (\varphi_J)^2 - E_J \cos(\varphi_J + \varphi_{ext}), \end{aligned} \quad (4.7)$$

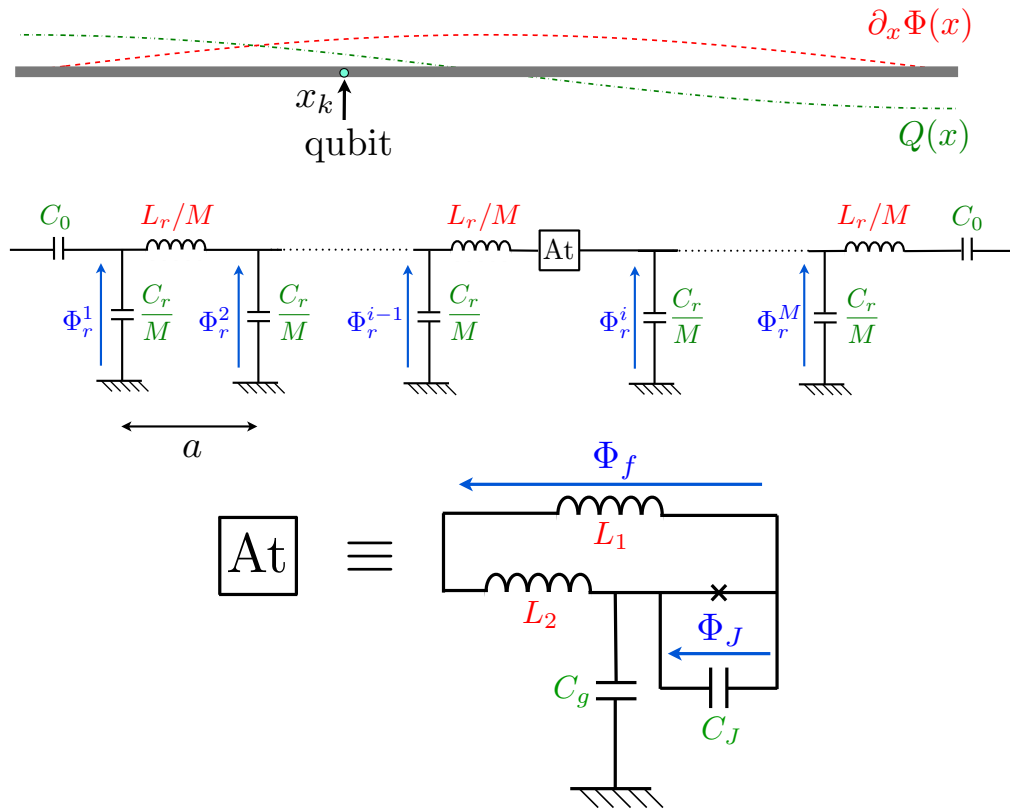


FIGURE 4.1 – Le qubit est placé au sein de la ligne de transmission à la position x_k . Les couplages capacitifs et inductifs vont dépendre de l'amplitude des modes de charge et de flux à la position du qubit.

avec, en ayant posé $L_\Sigma^2 = L_1 L_2 + L_1 L_r / M + L_2 L_r / M$, $C_\Sigma^2 = C_g C_J + C_g C_r / M + C_J C_r / M$,

$$\begin{aligned} E_{C_r}'' &= 2e^2 \frac{1}{C_r''} & E_{L_r}'' &= \left(\frac{\hbar}{2e} \right)^2 \frac{1}{2L_r''} \\ G_C &= 4e^2 \frac{C_g}{C_\Sigma^2} & G_L &= - \left(\frac{\hbar}{2e} \right)^2 \frac{L_1}{L_\Sigma^2} \\ E_{C_F}' &= 2e^2 \frac{1}{C_F'} & E_{L_F}' &= \left(\frac{\hbar}{2e} \right)^2 \frac{1}{2L_F'}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

les capacités et inductances renormalisées (trouvées grâce aux fig. 4.1 et 3.7) étant données par :

$$\begin{aligned} C_r'' &= C_r + \frac{C_g C_J}{C_g + C_J} - \frac{C_r}{M} \\ L_r'' &= L_r + \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} - \frac{L_r}{M} \\ C_F' &= C_g + C_J + C_g \left(\frac{C_r / M}{C_g + C_r / M} - 1 \right) \\ L_F' &= L_1 + L_2 + L_1 \left(\frac{L_r / M}{L_1 + L_r / M} - 1 \right). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Ces quantités sont à comparer aux inductances et capacités de la cavité nue (L_r et C_r) et de l'atome nu ($L_F = L_1 + L_2$ et $C_F = C_g + C_J$), nous voyons ainsi que le fait de coupler les atomes à la cavité perturbe ces deux entités.

Il est alors intéressant de mettre en évidence trois termes au sein de l'Hamiltonien :

$$\mathcal{H}_{circ} = \mathcal{H}_{at} + \mathcal{H}_{TLR} + \mathcal{H}_{int}, \quad (4.10)$$

avec \mathcal{H}_{at} qui représente l'Hamiltonien de l'atome artificiel, \mathcal{H}_{TLR} représente quant à lui l'Hamiltonien de la ligne de transmission et enfin \mathcal{H}_{int} représente l'Hamiltonien d'interaction entre la ligne de transmission et l'atome artificiel. Leurs expression sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{at} &= E_{C_F}' (N_J)^2 + E_{L_F}' (\varphi_J)^2 - E_J \cos(\varphi_J + \varphi_{ext}) \\ \mathcal{H}_{TLR} &= \sum_i \{ E_{C_r}'' (N_r^i)^2 + E_{L_r}'' (\varphi_r^{i+1} - \varphi_r^i)^2 \} \\ \mathcal{H}_{int} &= G_C N_J N_r^{k+1} + G_L \varphi_J (\varphi_r^{k+1} - \varphi_r^k). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Commençons par nous intéresser à \mathcal{H}_{TLR} , la procédure de quantification des modes dans la ligne de transmission ayant déjà été traitée, les résultats se transposent très facilement, cependant, les fréquences propres des modes sont renormalisées : $(\omega_k = k\pi/\sqrt{L_r''C_r''})$, de même que l'impédance propre de la ligne de transmission $Z'' = \sqrt{L_r''/C_r''}$. Intéressons nous à présent à l'Hamiltonien atomique \mathcal{H}_{at} , qui est celui d'un Fluxonium. Nous avons déjà eu affaire à cet atome artificiel dans le chapitre d'introduction à la circuit-QED. Nous savons que le régime pour lequel l'opérateur flux sera non diagonal et proportionnel à $\hat{\sigma}_x$ est celui pour lequel $\varphi_{ext} = \pi$. Quel sera alors la forme de l'opérateur de charge dans ce genre de régime ? L'opérateur de charge est impaire (tout comme l'opérateur de flux) car il est possible de le définir comme $\hat{N}_J = -i\frac{\partial}{\partial\varphi_J}$, donc dans le régime que nous considérons, par le même argument que pour l'opérateur flux (fonctions d'ondes paires ou impaires et opérateur impaire), l'opérateur de charge ne possède pas de terme diagonaux et il est possible de montrer que si $\hat{\varphi}_J \propto \hat{\sigma}_x$ alors $\hat{N}_J \propto \hat{\sigma}_y$. En effet, $[\hat{\varphi}_J, \mathcal{H}_{at}] = 2iE'_{CF}\hat{N}_J$, par conséquent dans le sous-espace des deux niveaux atomiques de plus basse énergie $\{|g\rangle, |e\rangle\}$ (avec $\omega_e > \omega_g$) nous aurons :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{at} &= \frac{\hbar\omega_{eg}}{2}\hat{\sigma}_z, \\ \hat{\varphi}_J &= \langle g|\hat{\varphi}_J|e\rangle|g\rangle\langle e| + \langle e|\hat{\varphi}_J|g\rangle|e\rangle\langle g|, \\ \hat{N}_J &= i\frac{\omega_{eg}}{2E'_{CF}}(\langle g|\hat{\varphi}_J|e\rangle|g\rangle\langle e| - \langle e|\hat{\varphi}_J|g\rangle|e\rangle\langle g|),\end{aligned}\tag{4.12}$$

et il est à présent apparent que si $\langle e|\hat{\varphi}_J|g\rangle$ est réel, alors $\hat{\varphi}_J \propto \hat{\sigma}_x$ et $\hat{N}_J \propto \hat{\sigma}_y$ (si cela n'est pas le cas, il sera toujours possible de changer de référentiel en opérant une rotation des spins autour de l'axe z : $U = \exp(i\theta\sigma_z)$ pour se ramener à la situation que nous allons décrire). Ainsi nous aurons :

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}_J &= \langle g|\hat{\varphi}_J|e\rangle\hat{\sigma}_x, \\ \hat{N}_J &= -\frac{\hbar\omega_{eg}}{2E'_{CF}}\langle g|\hat{\varphi}_J|e\rangle\hat{\sigma}_y\end{aligned}\tag{4.13}$$

Intéressons-nous enfin à l'Hamiltonien de couplage \mathcal{H}_{int} , pour faire cela il faut introduire les opérateurs flux et charge quantifiés de la ligne de transmission en limite continue introduits dans le chapitre concernant la circuit-QED. Puis, grâce aux expressions (4.8) et (4.12) il est possible de déterminer les amplitudes des couplages capacitifs et

inductifs :

$$\begin{aligned}\Omega_I(x) &= \tilde{\omega} \sin(\pi/2M) \sin(\pi x/d) \frac{L_r'' L_1}{L_\Sigma^2} \sqrt{\frac{Z_{vac}}{Z''}} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \langle g | \hat{\varphi}_J | e \rangle \\ \Omega_C(x) &= 2\tilde{\omega} \cos(\pi x/d) \frac{C_g C_r''}{C_\Sigma^2} \sqrt{\frac{Z''}{Z_{vac}}} \sqrt{\alpha} \langle g | \hat{N}_J | e \rangle.\end{aligned}\quad (4.14)$$

Par conséquent, le rapport entre ces deux couplages est :

$$\frac{\Omega_I(x)}{\Omega_C(x)} = -\frac{E_{C_J}}{\hbar\omega_{eg}} \frac{L_1}{C_g} \frac{C_\Sigma^2}{L_\Sigma^2} \frac{Z_{vac} Z''}{\alpha} \sin(\pi/2M) \tan(\pi x/d), \quad (4.15)$$

il est très intéressant de noter que ce rapport peut, en fonction des paramètres choisis pour le circuit, varier entre $-\infty$ et $+\infty$, en raison de la présence du terme $\tan(\pi x/d)$. Une fois ces développements terminés, l'Hamiltonien du qubit couplé inductivement et capacitivement à la ligne de transmission prend la forme suivante (en ayant posé $\omega_0 = \omega_{eg}$) :

$$\mathcal{H}_{circ}/\hbar = \tilde{\omega} \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\omega_0}{2} \hat{\sigma}_z + \Omega_I(x) (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) + \Omega_C(x) (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) (\hat{\sigma}_+ - \hat{\sigma}_-), \quad (4.16)$$

et selon l'endroit où le qubit sera disposé (et les paramètres de la ligne de transmission et du qubit), on pourra se retrouver dans une situation dans laquelle $\Omega_C(x) > \Omega_I(x)$, $\Omega_I(x) > \Omega_C(x)$ ou encore $\Omega_I(x) = \Omega_C(x)$. Voyons à présent ce que cette possibilité offerte quant au choix des poids relatifs des couplages inductifs et capacitifs implique quant à la transition de phase qui peut avoir lieu dans ces systèmes. Ces résultats se généralisent aisément à un ensemble de N_{at} qubits couplés à la ligne de transmission.

4.3 Généralisation à un nombre arbitraire de qubits

De la même manière que dans la partie 3.6 il était possible de choisir les paramètres du circuit de manière à ce que le couplage aux atomes artificiels ne perturbe pas trop la ligne de transmission, il est possible de le faire dans ce cas précis (en choisissant $C_r/M \approx C_g C_J / (C_g + C_J)$ et $L_r/M \approx L_1 L_2 / (L_1 + L_2)$), de cette manière $\omega \approx \tilde{\omega}$. De plus, si nous supposons qu'il est possible de choisir de répartir les atomes au sein de la ligne de transmission de telle manière à ce que $\Omega_I(x) \approx \Omega_E / \sqrt{N_{at}}$ et $\Omega_C(x) \approx \Omega_M / \sqrt{N_{at}}$, $\forall x$ (ce qui peut être fait soit en choisissant de placer tout les atomes artificiels dans une région de la ligne de transmission dont la taille est faible comparée à la longueur d'onde du

mode de cavité ou encore en choisissant précautionneusement les paramètres de chaque atome artificiel), nous obtenons finalement l'Hamiltonien total suivant :

$$\mathcal{H}/\hbar = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_0 \hat{J}_z + \frac{\Omega_E}{\sqrt{N_{at}}}(\hat{J}_+ + \hat{J}_-)(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) + \frac{\Omega_M}{\sqrt{N_{at}}}(\hat{J}_+ - \hat{J}_-)(\hat{a} - \hat{a}^\dagger). \quad (4.17)$$

Il sera ainsi possible en choisissant convenablement les paramètres du circuit et le nombre d'atomes artificiels couplés à la ligne de transmission, d'atteindre le régime de couplage ultrafort.

4.3.1 Symétries de l'Hamiltonien

Lorsque $\Omega_M \neq \Omega_E$, l'Hamiltonien (4.17) possède une symétrie de parité Π (de type \mathbb{Z}_2), dont il a déjà été question pour le modèle de Dicke [53]. Il est cette fois-ci intéressant de remarquer que la symétrie de parité est composée de deux autres symétries $\Pi = \mathcal{T}_E \circ \mathcal{T}_M$ qui pourront être brisées séparément :

$$\begin{aligned} (a + a^\dagger, i(a - a^\dagger), J_x, J_y) &\xrightarrow{\mathcal{T}_E} (-a - a^\dagger, i(a - a^\dagger), -J_x, J_y) \\ (a + a^\dagger, i(a - a^\dagger), J_x, J_y) &\xrightarrow{\mathcal{T}_M} (a + a^\dagger, -i(a - a^\dagger), J_x, -J_y), \end{aligned} \quad (4.18)$$

De plus, lorsque les amplitudes des couplages inductifs et capacitifs sont égales ($\Omega_M = \Omega_E = \Omega$) l'Hamiltonien devient :

$$\mathcal{H} = \hbar\omega_0 J_z + \hbar\omega a^\dagger a + 2\frac{\hbar\Omega}{\sqrt{N}}(aJ_+ + a^\dagger J_-). \quad (4.19)$$

Les termes anti-résonnants s'en vont et nous obtenons un Hamiltonien de type Tavis-Cummings [127] qui possède une symétrie continue $U(1)$ caractérisée par l'action de l'opérateur $\mathcal{R}_\theta = \exp[i\theta(a^\dagger a + J_z + N_{at}/2)]$:

$$\mathcal{R}_\theta^\dagger (a, a^\dagger, J_+, J_-) \mathcal{R}_\theta = (ae^{-i\theta}, a^\dagger e^{i\theta}, J_+ e^{i\theta}, J_- e^{-i\theta}). \quad (4.20)$$

Ces symétries sont résumées sur la figure 4.2.

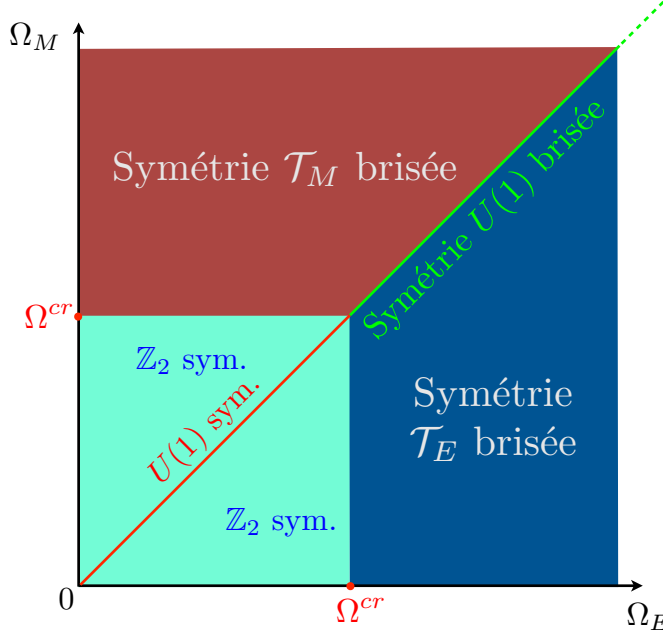


FIGURE 4.2 – Diagramme de Symétrie du modèle de l'Eq. (4.17) dans le plan (Ω_E, Ω_M) . Les symétries sont brisées lors du passage d'une phase à l'autre.

4.3.2 Limite thermodynamique

Diagramme de phase

Nous allons commencer par étudier la limite thermodynamique en utilisant à nouveau une transformation de Holstein-Primakoff ($J_+ = b^\dagger \sqrt{N_{at} - b^\dagger b}$, $J_- = \sqrt{N - b^\dagger b} b$, $J_z = b^\dagger b - \frac{N_{at}}{2}$). Puis, nous avons à nouveau suivi une approche de type champ-moyen en introduisant les opérateurs déplacés par rapport à leur valeur moyenne ($a \rightarrow \alpha + c$, $b \rightarrow \beta + d$ with $\alpha = \langle a \rangle \propto \sqrt{N_{at}}$ et $\beta = \langle b \rangle \propto \sqrt{N_{at}}$). En ne conservant que les termes proportionnels au nombre de systèmes à deux niveaux N_{at} nous obtenons la valeur moyenne de l'énergie du fondamental en terme de α , α^* , β et β^* :

$$E_G/\hbar = \omega |\alpha|^2 + \omega_0 |\beta|^2 + \left[\Omega_E (\alpha + \alpha^*) (\beta + \beta^*) + \Omega_M (\alpha - \alpha^*) (\beta^* - \beta) \right] \sqrt{1 - \frac{|\beta|^2}{N_{at}}}. \quad (4.21)$$

Si il existe une valeur non nulle de α et β qui minimise E_G , cela signifie que l'état fondamental du système possède une cohérence photonique non nulle et que les systèmes

à deux niveaux sont polarisés (possèdent une cohérence atomique). Ces cohérences sont à nouveau les paramètres d'ordre de la transition de phase superradiante. Une première minimisation de E_G par rapport à α^* donne :

$$\alpha = - \left(\frac{\Omega_E}{\omega}(\beta + \beta^*) + \frac{\Omega_M}{\omega}(\beta - \beta^*) \right) \sqrt{1 - \frac{|\beta|^2}{N_{at}}}. \quad (4.22)$$

En substituant cette valeur dans l'équation (4.21), nous obtenons l'énergie de l'état fondamental en fonction de β et β^* uniquement :

$$\begin{aligned} E_G(\beta, \beta^*)/\hbar = & \left(\omega_0 - 4 \frac{\Omega_E^2 + \Omega_M^2}{\omega} \right) |\beta|^2 + 4 \frac{\Omega_E^2 + \Omega_M^2}{\omega} |\beta|^4 \\ & + \frac{\Omega_E^2 - \Omega_M^2}{\omega} (\beta^2 + (\beta^*)^2) \left(1 - \frac{|\beta|^2}{N_{at}} \right). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Une seconde minimisation de cette énergie par rapport à (β, β^*) nous permet de déterminer la valeur des cohérences qui minimisent l'énergie du fondamental et peuvent être de 4 types. Pour chacun de ces types de cohérences, nous avons représenté l'énergie $E_G(\beta, \beta^*)$ sur la figure 4.3 qui correspondent aux 4 différentes phases dans lesquelles le système peut se trouver :

i) La phase "Normale" (cf. fig. 4.3a) dans laquelle le système se trouve lorsque $\Omega_E < \Omega^{cr}$ et $\Omega_M < \Omega^{cr}$. Dans cette phase la partie photonique n'est pas cohérente et les pseudospins ne sont pas polarisés $((\alpha, \beta) = (0, 0))$.

ii) Une phase que nous appellerons superradiante "électrique" (que nous aurions également appeler superradiante de "charge", cf. fig. 4.3d) dans laquelle le système se trouve lorsque $\Omega_E > \Omega^{cr}$ et $\Omega_E > \Omega_M$. Dans cette phase la partie photonique est cohérente, de cohérence réelle et les spins sont polarisés dans la direction x ($\langle \hat{J}_x \rangle \neq 0$). L'expression des paramètres d'ordre dans cette phase est $((\alpha, \beta) = (\mp \frac{\Omega_E}{\omega_0} \sqrt{N_{at}(1 - \mu_E^2)}, \pm \sqrt{\frac{N_{at}}{2}(1 - \mu_E)})$). Cette phase brise la symétrie \mathcal{T}_E , ce qui est assez facile à voir visuellement (cf. fig. 4.3d) puisque l'énergie du fondamental en champ moyen possède deux minima sur l'axe réel.

iii) Une phase que nous appellerons superradiante "magnétique" (que nous aurions également appeler superradiante de "flux", cf. Fig. 4.3c) qui apparait lorsque $\Omega_M > \Omega^{cr}$ et $\Omega_M > \Omega_E$. Dans cette phase la partie photonique est cohérente, de co-

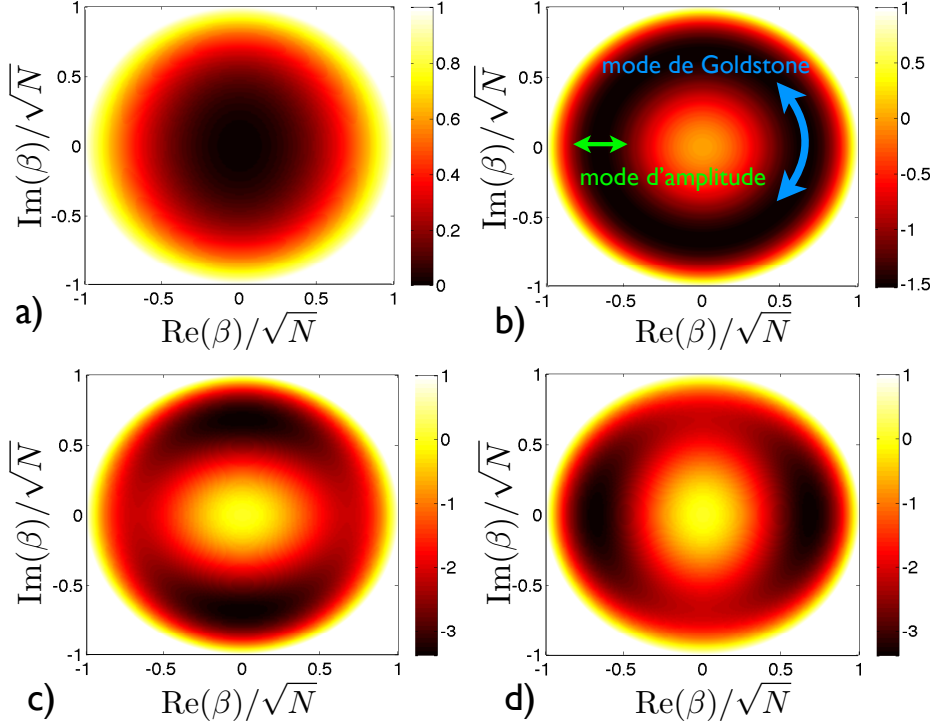
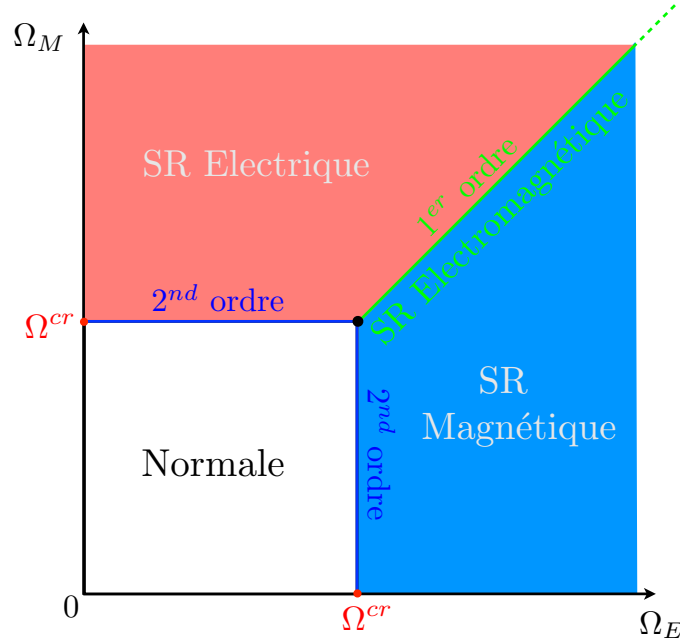


FIGURE 4.3 – Énergie du fondamental en champ moyen ($E_G(\beta, \beta^*)/N_{at}$) dans le plan $(\text{Re}(\beta)/\sqrt{N_{at}}, \text{Im}(\beta)/\sqrt{N_{at}})$, à résonance ($\omega = \omega_0$, $\Omega^{cr} = 0.5\omega$) et dans quatre cas intéressants. **a)** $\Omega_E = 0.1\omega$ et $\Omega_M = 0.3\omega$: le système se trouve en phase Normale avec un minimum en $(0, 0)$. **b)** $\Omega_E = \Omega_M = \omega$: L'énergie de l'état fondamental a une forme de chapeau mexicain et possède une vallée d'états dégénérés. **c)** $\Omega_E = 1\omega$ and $\Omega_M = 1.5\omega$: L'énergie du fondamental est anisotrope avec deux minima sur l'axe imaginaire. **d)** $\Omega_E = 1.5\omega$ and $\Omega_M = 1\omega$: L'énergie du fondamental est anisotrope avec deux minima sur l'axe réel.

hérence imaginaire et les spins sont polarisés dans la direction y ($\langle \hat{J}_y \rangle \neq 0$). $(\alpha, \beta) = (\mp i \frac{\Omega_M}{\omega_0} \sqrt{N_{at}(1 - \mu_M^2)}, \pm i \sqrt{\frac{N_{at}}{2}}(1 - \mu_M))$. Cette phase brise la symétrie \mathcal{T}_M , ce qui est assez évident visuellement (cf. fig. 4.3d) puisque l'énergie du fondamental en champ moyen possède deux minima sur l'axe imaginaire cette fois-ci.

iv) Enfin, il existe une quatrième phase que nous appellerons superradiante "électromagnétique" (cf. fig. 4.3b) qui apparaît lorsque $\Omega_M = \Omega_E$ et $\Omega_E > \Omega^{cr}$. De manière intéressante dans cette phase, le système possède une cohérence photonique complexe dans la direction θ par rapport à l'axe réel et les spins sont polarisés suivant cette même direction. La valeur des paramètres d'ordre est $(\alpha, \beta) = (-\frac{\Omega_E}{\omega_0} \sqrt{N_{at}(1 - \mu_E^2)}e^{i\theta}, \sqrt{\frac{N_{at}}{2}}(1 - \mu_E))e^{i\theta}$,

FIGURE 4.4 – Diagramme de phase du modèle dans le plan (Ω_E, Ω_M) .

$\theta \in [0, 2\pi[$. Cette phase brise la symétrie $U(1)$, ce qui est assez facile à voir visuellement (cf. fig. 4.3b) puisque l'énergie du fondamental en champ moyen possède une forme de chapeau mexicain avec une vallée de minima dégénérés décrits par l'angle θ .

Nous voyons donc que le diagramme de phase est très riche et composé de 4 phases différentes (cf. fig. 4.4) qui sont les résultat de trois brisures spontanées de symétrie différentes dont nous venons de parler.

Ordre des transitions de phase

Lorsqu'on s'intéresse aux transitions de phase, il est important de déterminer leur ordre. Celui-ci est déterminé par l'ordre auquel les dérivées de l'énergie du fondamental par rapport aux paramètres critiques (ici les couplages Ω_E et Ω_M) sont discontinues. Nous avons représenté sur la figure 4.5 les dérivées premières et secondes de l'énergie du fondamental par rapport aux paramètres Ω_E et Ω_M .

Il est très intéressant de remarquer que la phase superradiante électromagnétique qui

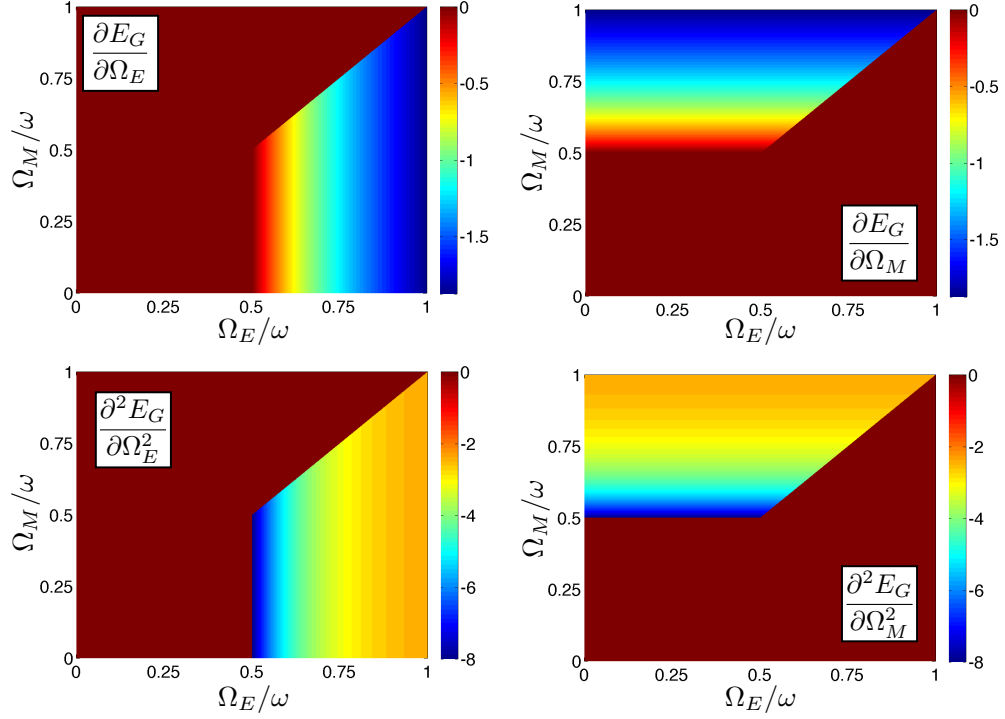


FIGURE 4.5 – Dérivées premières (figures du haut) et dérivées secondes (figures du bas) de l'énergie du fondamental par rapport à Ω_E (figures de gauche) et Ω_M (figures de droite) dans le plan (Ω_E, Ω_M) . Les dérivées premières présentent des discontinuités sur la diagonale qui correspondent à une transition de phase d'ordre 1. Les dérivées secondes présentent des discontinuités horizontales et verticales qui indiquent des transition de phase d'ordre 2.

est réduite à la ligne verte sur le diagramme de phase (cf. fig. 4.4) représente également la frontière entre les phases superradiante électrique et superradiante magnétique.

Spectre des excitations

Le spectre des excitations est calculé de la même manière que dans le cas du modèle de Dicke, en diagonalisant la partie quadratique de l'Hamiltonien dans lequel nous avons introduit les opérateurs déplacés ($a \rightarrow \alpha + c$, $b \rightarrow \beta + d$ with $\alpha = \langle a \rangle \propto \sqrt{N_{at}}$ and $\beta = \langle b \rangle \propto \sqrt{N_{at}}$). Nous donnons ici les Hamiltoniens quadratiques dans chacune des

phases :

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{bil}^N/\hbar &= \omega c^\dagger c + \omega_0 d^\dagger d + \Omega_E(c + c^\dagger)(d + d^\dagger) + \Omega_M(c - c^\dagger)(d^\dagger - d), \\
\mathcal{H}_{bil}^{SRE}/\hbar &= \omega c^\dagger c + \omega_0 \frac{1 + \mu_E}{2\mu_E} d^\dagger d + \Omega_M \sqrt{\frac{1 + \mu_E}{2}} (c - c^\dagger)(d^\dagger - d) \\
&\quad + \Omega_E \mu_E \sqrt{\frac{2}{1 + \mu_E}} (c + c^\dagger)(d + d^\dagger) + \omega_0 \frac{(3 + \mu_E)(1 - \mu_E)}{8\mu_E(1 + \mu_E)} (d + d^\dagger)^2, \\
\mathcal{H}_{bil}^{SRM}/\hbar &= \omega c^\dagger c + \omega_0 \frac{1 + \mu_M}{2\mu_M} d^\dagger d + \Omega_E \sqrt{\frac{1 + \mu_M}{2}} (c + c^\dagger)(d + d^\dagger) \\
&\quad + \Omega_M \mu_M \sqrt{\frac{2}{1 + \mu_M}} (c - c^\dagger)(d^\dagger - d) - \omega_0 \frac{(3 + \mu_M)(1 - \mu_M)}{8\mu_M(1 + \mu_M)} (d - d^\dagger)^2, \\
\mathcal{H}_{bil}^{SREM}/\hbar &= \omega c^\dagger c + \omega_0 \frac{1 + \mu}{2\mu} d^\dagger d + \Omega \frac{1 + 3\mu}{\sqrt{2(1 + \mu)}} (cd^\dagger + c^\dagger d) \\
&\quad + \omega_0 \frac{(3 + \mu)(1 - \mu)}{8\mu(1 + \mu)} (e^{i\theta} d + e^{-i\theta} d^\dagger)^2 - \frac{\Omega}{2} \frac{1 - \mu}{\sqrt{1 + \mu}} (e^{i2\theta} c^\dagger d^\dagger + e^{-i2\theta} cd).
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Les matrices de Hopfield-Bogoliubov correspondantes se mettent sous la forme :

$$\begin{pmatrix}
\omega & \tilde{\Omega}_E + \tilde{\Omega}_M & 0 & \tilde{\Omega}_M - \tilde{\Omega}_E \\
\tilde{\Omega}_E + \tilde{\Omega}_M & \tilde{\omega}_0 & \tilde{\Omega}_M - \tilde{\Omega}_E & \tilde{D} \\
0 & \tilde{\Omega}_E - \tilde{\Omega}_M & -\omega & -(\tilde{\Omega}_E + \tilde{\Omega}_M) \\
\tilde{\Omega}_E - \tilde{\Omega}_M & \tilde{D} & -(\tilde{\Omega}_E + \tilde{\Omega}_M) & -\tilde{\omega}_0
\end{pmatrix}, \tag{4.25}$$

avec :

$$(\tilde{\omega}_0, \tilde{\Omega}_E, \tilde{\Omega}_M, \tilde{D}) = (\omega_0, \Omega_E, \Omega_M, 0) \tag{4.26}$$

en phase normale,

$$\begin{aligned}
(\tilde{\omega}_0, \tilde{\Omega}_E, \tilde{\Omega}_M, \tilde{D}) &= \left(\frac{\omega_0}{4\mu_E} \frac{4 + (1 + \mu_E)^2}{1 + \mu_E}, \Omega_E \mu_E \sqrt{\frac{2}{1 + \mu_E}}, \right. \\
&\quad \left. \Omega_M \sqrt{\frac{1 + \mu_E}{2}}, \frac{\omega_0}{4\mu_E} \frac{(1 - \mu_E)(3 + \mu_E)}{1 + \mu_E} \right)
\end{aligned} \tag{4.27}$$

en phase superradiante électrique et

$$(\tilde{\omega}_0, \tilde{\Omega}_E, \tilde{\Omega}_M, \tilde{D}) = \left(\frac{\omega_0}{4\mu_M} \frac{4 + (1 + \mu_M)^2}{1 + \mu_M}, \Omega_E \sqrt{\frac{1 + \mu_M}{2}}, \right. \\ \left. \Omega_M \mu_M \sqrt{\frac{2}{1 + \mu_M}}, \frac{\omega_0}{4\mu_M} \frac{(1 - \mu_M)(3 + \mu_M)}{1 + \mu_M} \right) \quad (4.28)$$

en phase superradiante magnétique.

Dans le cas particulier de la phase superradiante électromagnétique, la matrice de Hopfield-Bogoliubov est :

$$\begin{pmatrix} \omega & \tilde{\Omega}_c & 0 & \tilde{\Omega}_d \\ \tilde{\Omega}_c & \tilde{\omega}_0 & \tilde{\Omega}_d & \tilde{D}_{EM} \\ 0 & -\tilde{\Omega}_d^* & -\omega & -\tilde{\Omega}_c \\ -\tilde{\Omega}_d^* & -\tilde{D}_{EM}^* & -\tilde{\Omega}_c & -\tilde{\omega}_0 \end{pmatrix}, \quad (4.29)$$

avec $(\tilde{\omega}_0, \tilde{\Omega}_c, \tilde{\Omega}_d, \tilde{D}_{EM}) = (\frac{\omega_0}{4\mu} \frac{(1-\mu)(3+\mu)}{1+\mu}, \Omega \frac{1+3\mu}{\sqrt{2(1+\mu)}}, -\Omega \frac{1-\mu}{\sqrt{2(1+\mu)}} e^{i2\theta}, \frac{\omega_0}{2\mu} \frac{1-\mu}{1+\mu} e^{i2\theta})$. Ces matrices possèdent deux valeurs propres positives et deux valeurs propres négatives, les modes propres sont bien sûr les valeurs propres positives de ces matrices. La fréquence des branches polaritoniques haute et basse peuvent être exprimées de la façon suivante :

$$\epsilon_{\pm}/\hbar = \omega_{\pm} = \sqrt{\frac{\omega^2 + \zeta^2 + 8\lambda\chi \pm \sqrt{(\zeta^2 - \omega^2)^2 + 16(\lambda\omega + \chi\zeta)(\lambda\zeta + \chi\omega)}}{2}}, \quad (4.30)$$

avec $(\lambda, \chi, \zeta) = (\Omega_E, \Omega_M, \omega_0)$ en phase normale, $(\lambda, \chi, \zeta) = (\Omega_E \mu_E, \Omega_M, \omega_0/\mu_E)$ en phase superradiante électrique et $(\lambda, \chi, \zeta) = (\Omega_E, \Omega_M \mu_M, \omega_0/\mu_M)$ en phase superradiante magnétique.

Les branches polaritoniques haute (ω_+) et basse (ω_-) ont été représentées sur la figure 4.6. Nous remarquons immédiatement un fait extrêmement intéressant : l'apparition d'une excitation qui ne possède pas de gap même au delà du point critique sur la diagonale. Cette excitation particulière s'appelle un mode de Goldstone et résulte de la brisure spontanée de symétrie continue $U(1)$. En effet, comme nous en avons déjà discuté dans le cas du modèle de Dicke, la fréquence des modes propres est proportionnelle à la courbure de l'énergie du fondamental en champ moyen, au voisinage de ses minimas. Dans le cas où la symétrie $U(1)$ est brisée l'énergie du fondamental en champ moyen (cf. fig 4.3b) a une forme de chapeau Mexicain avec une vallée d'états dégénérée, et le système choisit un de ces états possédant un angle θ particulier, ce qui signifie que la courbure dans

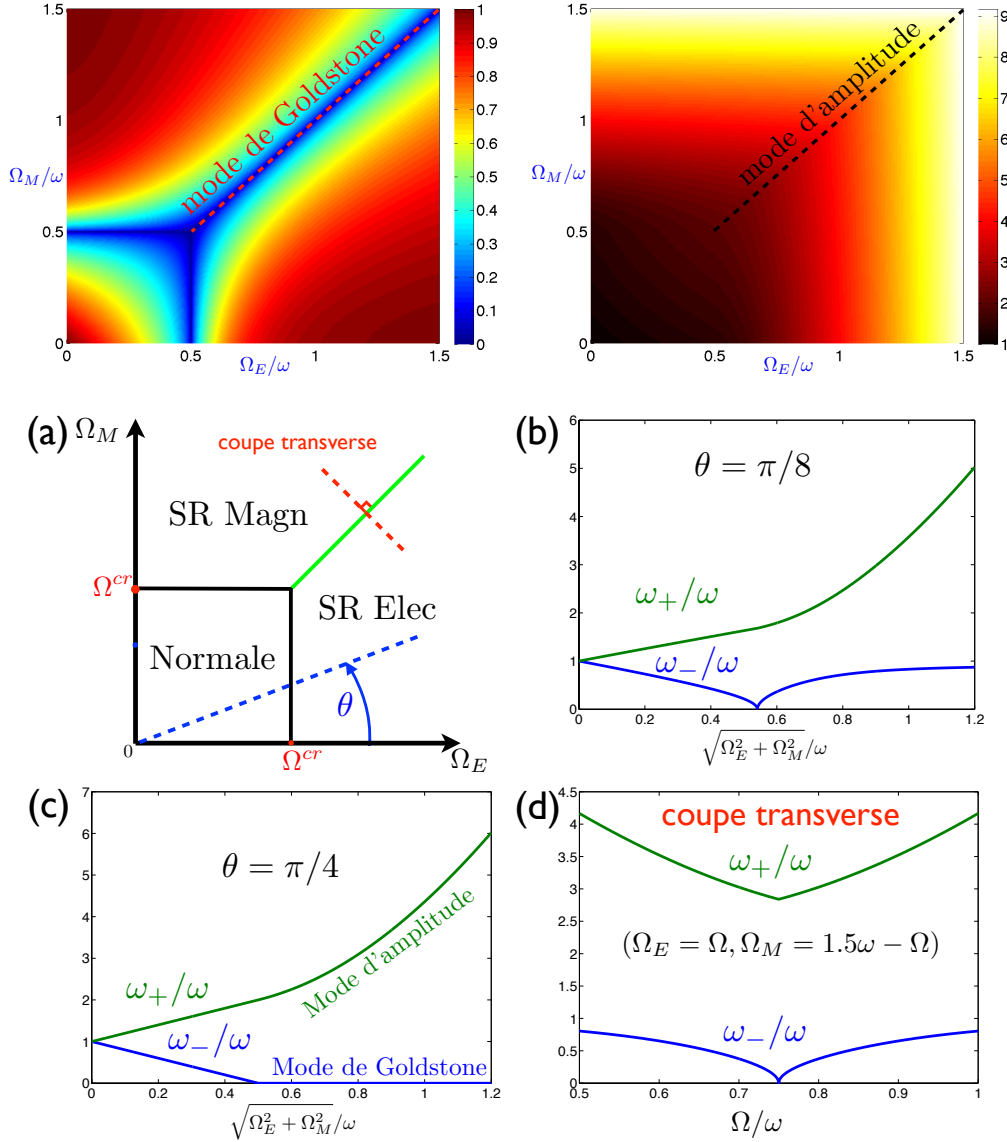


FIGURE 4.6 – Branches polaritoniques basse (ω_- , en haut à gauche) et haute (ω_+ , en haut à droite) (en unités de ω) à résonance ($\omega = \omega_0$) dans le plan (Ω_E, Ω_M) . Coupe selon plusieurs axes représentés sur la figure (a) : angle de $\pi/8$ (fig. (b)), angle de $\pi/4$ (fig. (c)), coupe transverse (fig. (d)).

la direction angulaire (direction de θ) est nulle. Cette excitation angulaire correspond au mode de Goldstone et explique pourquoi son énergie est nulle par rapport à l'état fondamental.

Nous voyons donc que ce type de circuit possède une richesse de phases en limite

thermodynamique plus importante que le modèle de Dicke traditionnel avec notamment une phase d'un genre nouveau : celle dans laquelle une symétrie continue est brisée (phase superradiante électromagnétique). Il est alors naturel de regarder plus précisément ce qu'il se passe en taille finie dans cette nouvelle phase, ce qui fera l'objet d'une des sections suivantes.

4.3.3 Etude du modèle général en taille finie

Nous allons commencer l'étude de ce modèle en taille finie de manière numérique : nous avons tracé les valeurs moyennes des observables intéressantes dans le cadre de l'étude de ce modèle, à savoir : le nombre moyen d'excitations dans le fondamental ($\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{J}_z \rangle$, fig. 4.11), les fluctuations des composantes en x et en y des spins collectifs ($\langle \hat{J}_x^2 \rangle$, fig. 4.7 et $\langle \hat{J}_y^2 \rangle$, fig. 4.8 car $\langle \hat{J}_x \rangle = \langle \hat{J}_y \rangle = 0$ en taille finie, la symétrie de parité n'étant pas brisée) ainsi que les fluctuations des deux quadratures ($\langle (\hat{a}^\dagger + \hat{a})^2 \rangle$, fig. 4.9 et $\langle -(\hat{a}^\dagger - \hat{a})^2 \rangle$, fig. 4.10). Nous voyons apparaître un fait tout à fait remarquable : les fluctuations des composantes de spins et des quadratures sont corrélées notamment lorsque $\langle (\hat{a}^\dagger + \hat{a})^2 \rangle \neq 0$, $\langle \hat{J}_x^2 \rangle \neq 0$ (idem pour l'autre quadrature et l'autre composante de spins) et permettent de discriminer entre les phases superradiantes Electrique et Magnétique. Nous voyons également qu'en phase superradiante Electromagnétique les observables évoluent de manière discontinue lorsque les couplages Ω_E et Ω_M varient et il semble de plus que $\langle \hat{J}_x^2 \rangle = \langle \hat{J}_y^2 \rangle$ et $\langle (\hat{a}^\dagger + \hat{a})^2 \rangle = \langle -(\hat{a}^\dagger - \hat{a})^2 \rangle$. La description des phases Superradiante Electrique et Magnétique se fait de manière tout à fait analogue à la description du Modèle de Dicke en taille finie, la vraie nouveauté ici vient de la phase superradiante Electromagnétique qui va faire l'objet d'une attention tout à fait particulière dans la prochaine section.

4.3.4 Etude du modèle de Dicke avec symétrie $U(1)$ (Tavis-Cummings) en taille finie

Nous allons nous intéresser au modèle de Tavis-Cummings (qui est une généralisation du modèle de Jaynes-Cummings à nombre arbitraire d'atomes) qui est décrit par l'Hamiltonien suivant :

$$\mathcal{H}_{TC} = \hbar\omega_0 J_z + \hbar\omega a^\dagger a + 2 \frac{\hbar\Omega}{\sqrt{N}} (a J_+ + a^\dagger J_-) \quad (4.31)$$

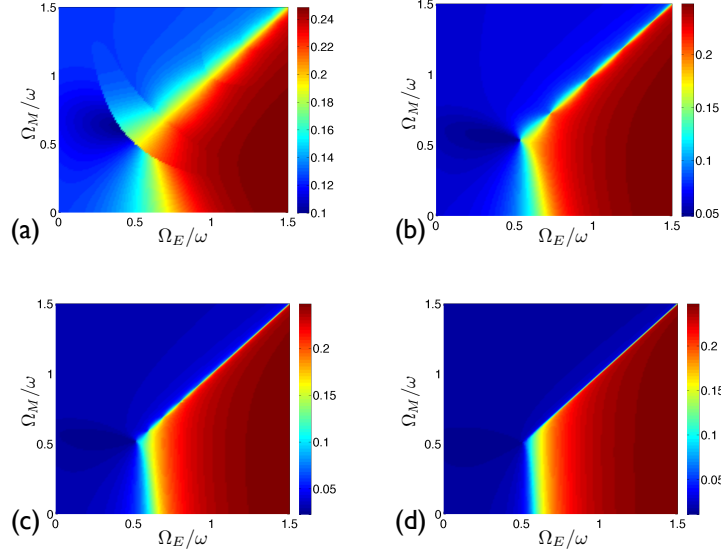


FIGURE 4.7 – Fluctuations de spin dans la direction x ($\sqrt{\langle \hat{J}_x^2 \rangle - \langle \hat{J}_x \rangle^2 / N_{at}}$) pour $N_{at} = 2$ (a), 4(b), 8(c), 16(d), qui correspond à la somme des fluctuations de flux au sein des qubits de la chaîne.

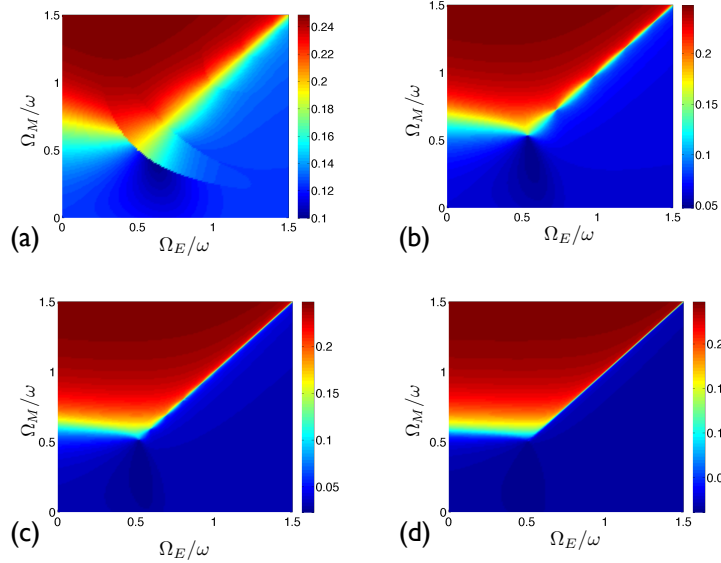


FIGURE 4.8 – Fluctuations de spin dans la direction y ($\sqrt{\langle \hat{J}_y^2 \rangle - \langle \hat{J}_y \rangle^2 / N_{at}}$) pour $N_{at} = 2$ (a), 4(b), 8(c), 16(d), qui correspond à la somme des fluctuations de charge au sein des qubits de la chaîne.

Pour faire cela nous allons commencer par regarder une vue en coupe sur la diagonale des figures de la section précédente (cf. fig. 4.12) : nous remarquons tout d'abord que les

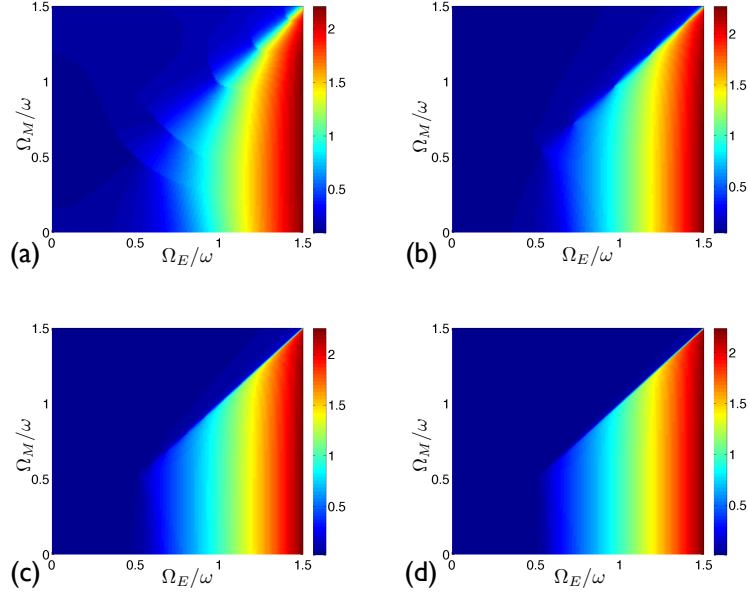


FIGURE 4.9 – Fluctuations du flux dans la ligne de transmission ($\sqrt{\langle(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2\rangle} - \langle\hat{a} + \hat{a}^\dagger\rangle^2/4N_{at}$) pour $N_{at} = 2$ (a), 4(b), 8(c), 16(d).

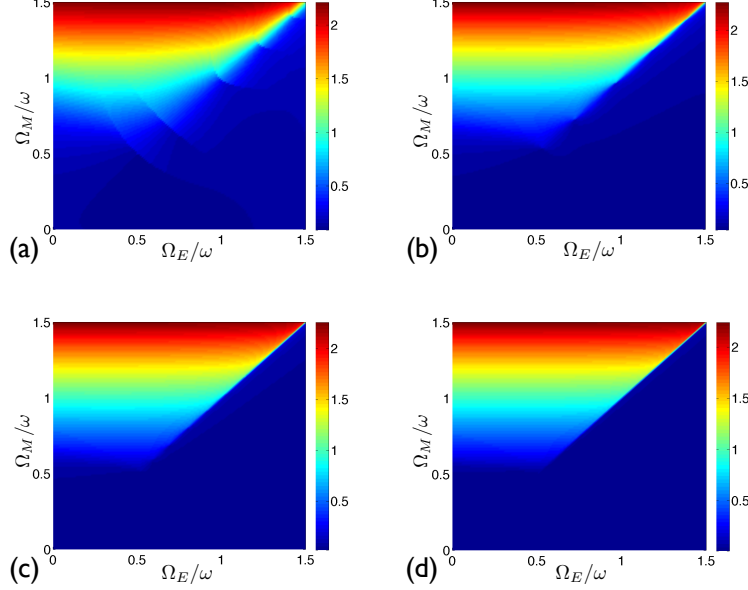


FIGURE 4.10 – Fluctuations de charges dans la ligne de transmission ($\sqrt{-\langle(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)^2\rangle} + \langle\hat{a} - \hat{a}^\dagger\rangle^2/4N_{at}$) pour $N_{at} = 2$ (a), 4(b), 8(c), 16(d).

fluctuations sur les deux quadratures du champ sont égales de même que les fluctuations de spins. Cela peut se comprendre de la manière suivante : au sein de l'Hamiltonien (4.31), l'amplitude du couplage des deux quadratures avec leurs composantes de spin respectives

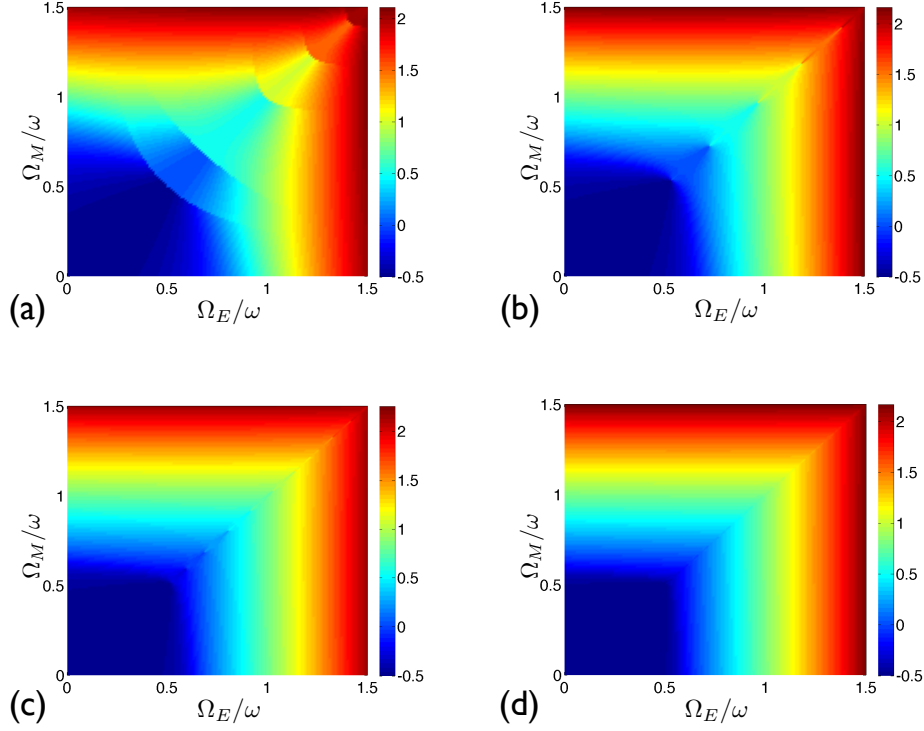


FIGURE 4.11 – Nombre moyen d’excitations du champ électromagnétique ($\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{J}_z \rangle / N_{at}$) dans la cavité supraconductrice dans l’état fondamental pour $N_{at} = 2$ (a), 4(b), 8(c), 16(d).

sont égales, il n’y a par conséquent pas de direction privilégiée pour l’orientation du spin dans le plan (x, y) , ce qui est réminiscent de la symétrie $U(1)$ de l’Hamiltonien pour laquelle l’opérateur unitaire associé (\mathcal{R}_θ) n’est rien d’autre qu’une rotation des spins (quadratures) dans le plan (\hat{J}_x, \hat{J}_y) ($(\hat{a}^\dagger + \hat{a}, -i(\hat{a}^\dagger - \hat{a}))$). Cela signifie donc que les états propres doivent posséder une symétrie circulaire dans ces plans. Il est également important de noter que la symétrie $U(1)$ résulte de la conservation du nombre d’excitation pour l’Hamiltonien (4.31) ($[\mathcal{H}_{TC}, \hat{N}_{exc}] = 0$) ce qui signifie que ses états propres doivent avoir un nombre d’excitations bien défini ce qui est confirmé sur la figure 4.12 qui représente le nombre d’excitations dans le fondamental en fonction du couplage lumière matière qui est constant par morceaux avec à nouveau des discontinuités en certains points particuliers. Il est alors naturel de s’interroger sur la raison de ces discontinuités, pour cela nous pouvons dans un premier temps regarder ce qu’il se passe à un atome unique lorsqu’on augmente le couplage car alors le modèle se réduit au modèle de Jaynes-Cummings pour lequel nous avons déjà des résultats analytiques.

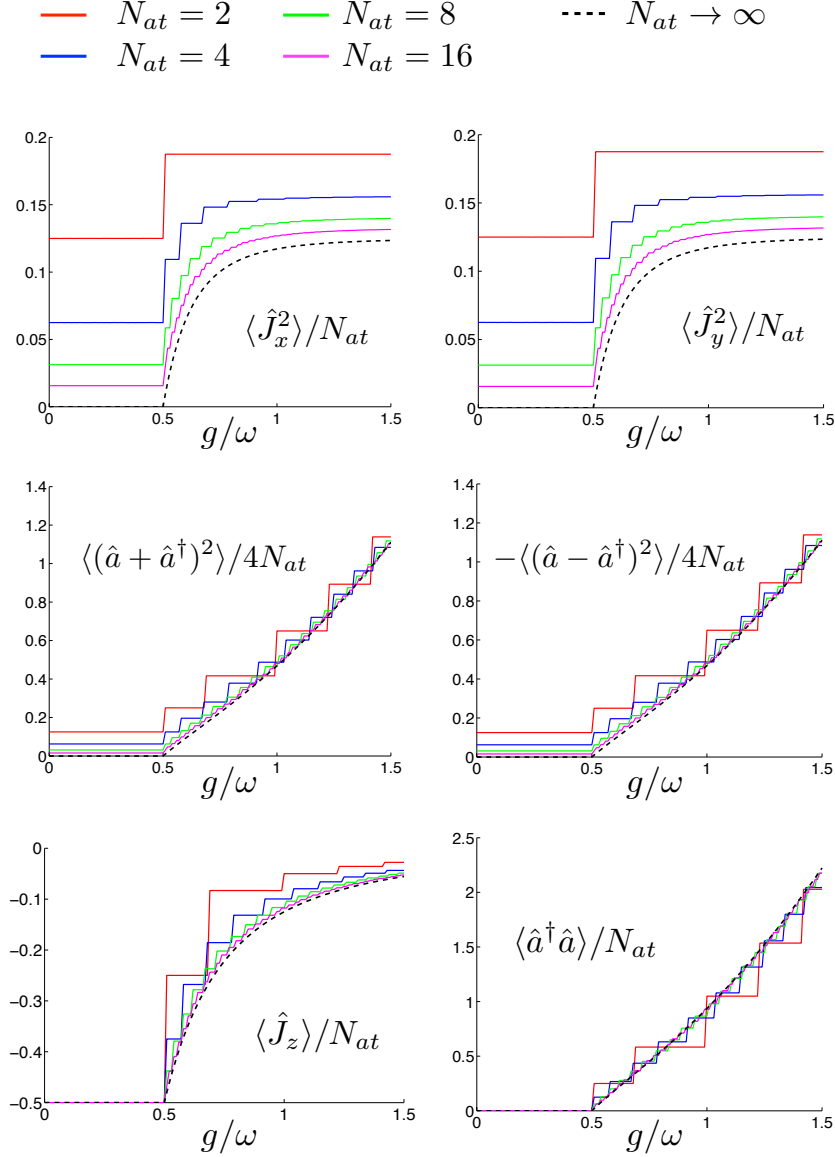
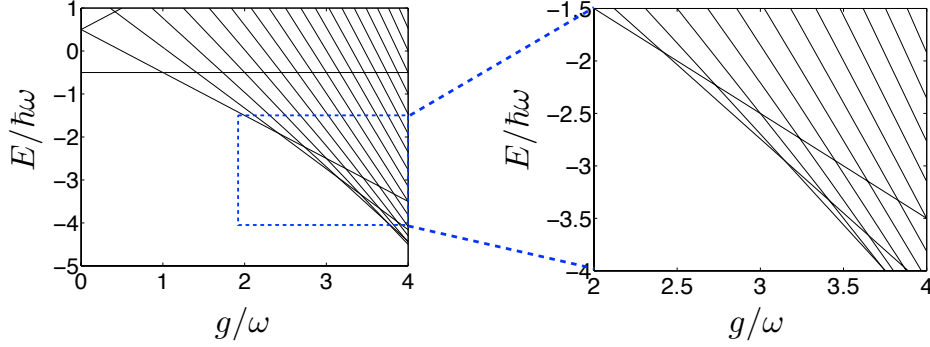


FIGURE 4.12 – Fluctuations des spins suivant les directions x et y (figures du haut) et des deux quadratures du champ (figures du milieu), ainsi que le nombre d’excitations atomiques et totales dans le fondamental (figures du bas) pour différentes valeurs de N_{at} .

Modèle de Jaynes Cummings en couplage ultra-fort

Par soucis de clarté, nous avons décidé de nous placer à partir de maintenant et jusqu’à la fin du manuscrit à résonance ($\omega = \omega_0$). Nous avons déjà parlé du modèle de Jaynes-

FIGURE 4.13 – Spectre de l'Hamiltonien de Jaynes-Cummings à résonance ($\omega = \omega_0$).

Cummings à plusieurs reprises et nous ne rappellerons pas tous les résultats le concernant. Nous allons cependant essayer de comprendre grâce à ce modèle simple la continuité par morceaux des observables. Pour commencer regardons le spectre de ce modèle en fonction du couplage lumière-matière (cf. fig 4.13) : on y voit apparaître des croisements de niveaux, notamment à basse énergie où nous voyons que le niveau fondamental varie de manière discontinue en certains couplages (que nous appellerons $g^{(n)}$, le niveau qui était alors le premier excité pour $g^{(n)} - \epsilon$ ($\epsilon \ll 1$) devenant le fondamental pour $g^{(n)} + \epsilon$, ce qui correspond à la situation de la figure 4.14. Les couplages $g^{(n)}$ correspondent ainsi à ceux pour lesquelles $E_{n+1} - E_n = 0$ soit encore $g^{(n+1)} = \omega/(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ et en ces points, le fondamental qui était l'état $|n, -\rangle$ est remplacé par l'état $|n+1, -\rangle$. Nous pouvons, grâce à ces observations déterminer la valeur moyenne de l'observable nombre de photons ($\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$) en fonction du couplage g :

$$\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle = \begin{cases} 0 & , \quad g \leq \omega = g^{(1)} \\ n - 1/2 & , \quad g^{(n)} < g \leq g^{(n+1)}. \end{cases} \quad (4.32)$$

La valeur moyenne de σ_z (différence de population entre l'état excité et l'état fondamental du système à deux niveaux) quant à elle, est extrêmement facile à déterminer en regardant la forme des états propres : à résonance, pour $g < \sqrt{\omega\omega_0}$ le système à deux niveaux se trouve dans son état fondamental, tandis que pour $g > \sqrt{\omega\omega_0}$ la population des états fondamental et excité de l'atome sont égales (hors résonance, l'inversion de population sera moindre).

La différence d'énergie entre le premier état excité et le fondamental possède également un comportement très caractéristique dans le cadre de ce modèle (cf. fig. 4.15) avec un

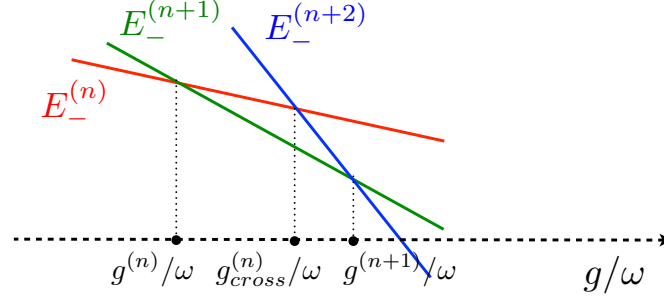


FIGURE 4.14 – Situation où nous pouvons voir que le premier état excité change également lorsque le couplage lumière-matière varie.

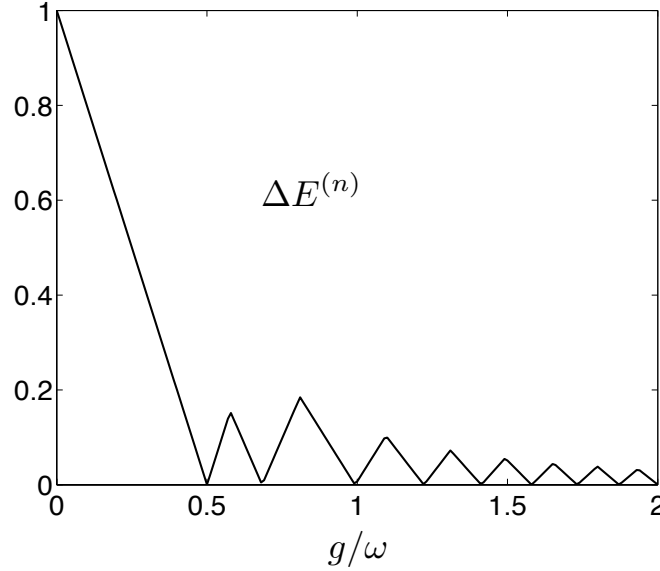


FIGURE 4.15 – Splitting $\Delta E^{(n)}$ (cf. éq. 4.33) entre le premier état excité et l'état fondamental à résonance ($\omega = \omega_0$).

comportement en dents de scie qui s'explique à nouveau grâce à la figure 4.14. Nous obtenons ainsi le splitting entre le fondamental et le premier excité (notée $\Delta E^{(n)}$) va croître jusqu'à ce qu'il y ait un croisement entre états excités qui correspond à $E_-^{(n)} = E_-^{(n+2)}$ soit encore à des couplages tels que $g_{cross}^{(n)} = 2\omega/(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$, ainsi nous aurons :

$$\Delta E^{(n)} = \begin{cases} \omega - g & , \quad g \leq \omega = g^{(1)} \\ -\omega + g(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) & , \quad g^{(n)} < g \leq g_{cross}^{(n)} \\ \omega - g(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) & , \quad g_{cross}^{(n)} < g \leq g^{(n+1)}. \end{cases} \quad (4.33)$$

ce qui reproduit parfaitement le comportement en dents de scie observé. La hauteur des "dents" (qui correspond au maximum du splitting entre deux zéros de celui-ci) est donnée par :

$$\Delta E_{max}^{(n)} = \omega \left(-1 + 2 \frac{\sqrt{1 + 1/n} - 1}{\sqrt{1 + 2/n} - 1} \right), \quad (4.34)$$

ce qui implique que $\Delta E_{max}^{(n)} \xrightarrow{g \rightarrow \infty} 0$ car n est une fonction monotone de g (lorsque g augmente, n augmente également). Nous voyons ainsi que les deux premiers états excités sont quasi dégénérés en limite de couplage ultra-fort. Mais sont-ce les seuls ? Et bien non, si nous calculons au même point la différence d'énergie entre les états $|n + 1, -\rangle$ et $|n + k, -\rangle$ (noté $\Delta E^{(n+k)}$), nous obtenons :

$$\Delta E^{(n+k)} = \omega \left(k - 1 - 2 \frac{\sqrt{1 + k/n} - \sqrt{1 + 1/n}}{\sqrt{1 + 2/n} - 1} \right), \quad (4.35)$$

et il est facile de montrer que $\Delta E^{(n+k)} \xrightarrow{g \rightarrow \infty} 0$ (qui ne dépend pas de k), nous aurons ainsi une infinité d'états fondamentaux dégénérés en limite de couplage ultra-fort ce qui ressemble fortement à la limite thermodynamique pour laquelle nous avons une vallée de minimas dégénérés. Ainsi, de la même manière que le modèle de Rabi possède deux fondamentaux dégénérés en limite de couplage ultra-fort, le modèle de Jaynes-Cummings en possède une infinité, ce qui est lié à la nature de la symétrie de leur Hamiltonien (discrète pour le modèle de Rabi, continue pour le modèle de Jaynes-Cummings) et est la manifestation à taille finie de l'apparition d'un mode de Goldstone en limite thermodynamique. Une nouvelle fois, la limite thermodynamique et la limite de couplage ultra-fort semblent donner lieu au même genre de comportement. Voyons ce qu'il en est de ces considérations avec un nombre arbitraire d'atomes.

Considérations algébriques pour l'Hamiltonien de Tavis-Cummings

Les propriétés dont nous allons parler seront valables à résonance ($\omega = \omega_0$) car dans ce cas, l'Hamiltonien de Tavis-Cummings possède une propriété tout à fait intéressante puisqu'il peut s'écrire sous la forme :

$$\mathcal{H}_{TC}/\hbar = \omega \hat{N}_{exc} + \frac{g}{\sqrt{N_{at}}} \hat{V} \quad (4.36)$$

avec $\hat{N}_{exc} = \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{J}_z + N_{at}/2$ l'opérateur nombre d'excitations et $\hat{V} = \hat{a}^\dagger \hat{J}_- + \hat{a} \hat{J}_+$ l'opérateur de couplage lumière-matière. La propriété tout à fait intéressante est que ces deux opérateurs commutent $[\hat{N}_{exc}, \hat{V}] = 0$, ce qui implique qu'ils possèdent une base commune d'états propres $|\zeta\rangle_i$ tels que $\hat{N}_{exc} |\zeta\rangle_i = N_{exc,i} |\zeta\rangle_i$ et $\hat{V} |\zeta\rangle_i = V_i |\zeta\rangle_i$ et l'énergie de ces états propres se mettra sous la forme :

$$E_i = \omega N_{exc,i} + \frac{g}{\sqrt{N_{at}}} V_i. \quad (4.37)$$

Nous voyons ainsi que comme $N_{exc,i}$ et V_i ne dépendent pas du couplage lumière-matière, le spectre de l'Hamiltonien de Tavis-Cummings en fonction de g sera composé d'un ensemble de droites de coefficient directeur V_i ce qui est apparent sur la figure 4.16 sur laquelle a été tracée le spectre de \mathcal{H}_{TC} en fonction de g/ω pour $N_{at} = 8$. De plus, les états propres de \mathcal{H}_{TC} ($|\zeta\rangle_i$) seront eux également indépendants de g ce qui signifie que si nous arrivons à trouver l'expression de $|\zeta\rangle_i$ pour n'importe quel couplage, elle sera valable quelque soit la valeur de ce dernier.

En nous basant sur le traitement en champ moyen, il est possible de déterminer le nombre d'excitations dans le fondamental en fonction du couplage, pour cela il nous suffit de trouver les points tels que $N_{exc} = |\alpha|^2 + |\beta|^2$ (avec $|\alpha|^2 = \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$, la valeur moyenne du nombre de photons en champ moyen et $|\beta|^2 = \langle \hat{J}_z \rangle + N_{at}/2$ la valeur moyenne du nombre d'excitations atomiques en champ moyen définies dans la partie précédente), ce qui nous donne les couplages suivants :

$$g^{(N_{exc})} = \frac{\omega}{2} \sqrt{\frac{3}{1 + 2 \frac{N_{exc}}{N_{at}} + \sqrt{(1 + 2 \frac{N_{exc}}{N_{at}})^2 + 3}}}. \quad (4.38)$$

Grâce a cette expression et aux considérations précédentes, nous allons pouvoir dégager quelques comportement concernant le spectre des excitations. Nous pouvons par exemple montrer que les couplages $g^{(N_{exc})}$ sont d'autant plus proches que N_{exc} et/ou N_{at} sont importants. En effet, il est possible de montrer que le rapport $g^{(N_{exc}+k)}/g^{(N_{exc})}$ possède la forme suivante lorsque $N_{exc} \gg k$:

$$\frac{g^{(N_{exc}+k)}}{g^{(N_{exc})}} \approx 1 + \frac{k}{N_{at}} \frac{1}{\sqrt{(1 - 2N_{exc}/N_{at})^2 + 3}} \xrightarrow{N_{exc} \rightarrow \infty} 1. \quad (4.39)$$

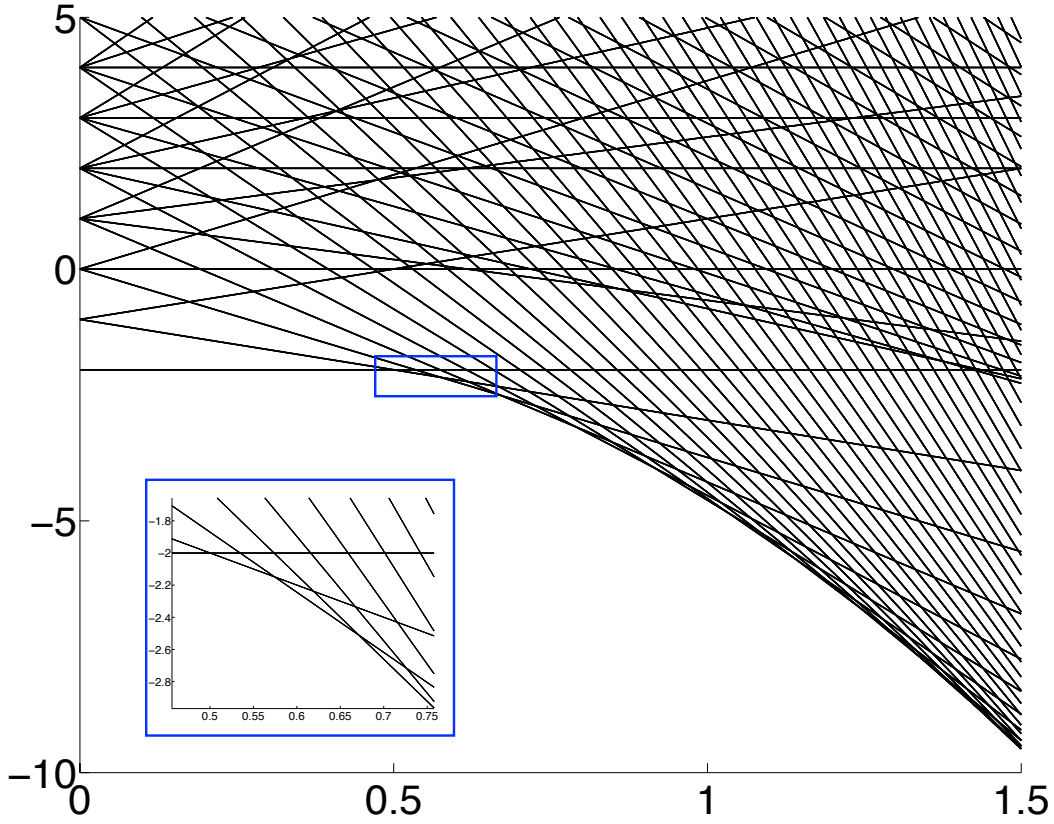


FIGURE 4.16 – Spectre de l'Hamiltonien \mathcal{H}_{TC} (4.31) en fonction de g/ω pour $N_{at} = 8$. Insert : zoom sur le cadre bleu. Nous voyons que le spectre est bien composé d'un ensemble de droites de coefficients directeurs différents, qui par conséquent se croisent.

Lorsque $N_{at} \gg k, N_{exc}$ (i.e. en limite thermodynamique), $g^{(N_{exc})}$ s'exprime de la manière suivante :

$$g^{(N_{exc})} \approx \frac{\omega}{2} + \frac{3\omega}{4} \frac{N_{exc}}{N_{at}} \xrightarrow{N_{at} \rightarrow \infty} \frac{\omega}{2}. \quad (4.40)$$

ce qui nous montre bien que plus le nombre d'atomes et/ou le couplage lumière-matière sont importants et plus les couplages auxquels ont lieu les croisements sont proches. Nous pouvons observer ces comportements au sein des spectres tracés sur la figure 4.17 sur laquelle ont été tracés les spectres des excitations (i.e. la différences d'énergie entre les différents niveaux et le fondamental).

Nous observons également le même genre de comportement en dents de scie en ce qui concerne les splittings que dans le cas Jaynes-Cummings traité précédemment qui peuvent

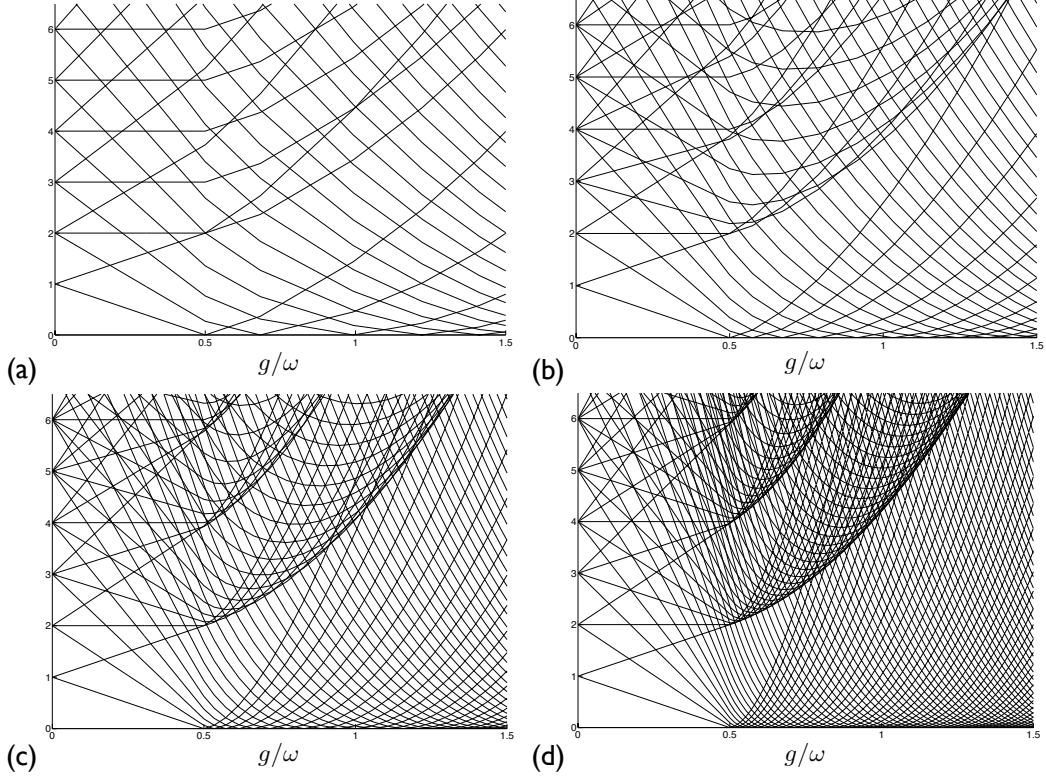


FIGURE 4.17 – spectre des excitations de l’Hamiltonien \mathcal{H}_{TC} (4.31) en fonction de g/ω pour $N_{at} = 2$ (a), 4(b), 8(c), 16(d). Nous voyons que les couplages auxquels le fondamental est modifié (i.e. les couplages pour lesquels un niveau excité possède une énergie nulle) sont d’autant plus proches que g/ω et/ou N_{at} sont importants. Nous voyons également apparaître le mode de Goldstone ainsi que le mode d’amplitude à mesure que le nombre d’atomes augmente.

également être expliqués par le comportement de $g^{(N_{exc})}$. Nous pouvons également essayer de dégager un comportement concernant la hauteur des "dents de scie". Pour cela il nous faut trouver une expression approchée des niveaux d’énergie. Les couplages $g^{(N_{exc})}$ correspondent à des croisements des niveaux $E_{N_{exc}}^-$ et $E_{N_{exc}+1}^-$, ainsi si nous cherchons les énergies propres sous la forme $E_{N_{exc}}^- = \omega N_{exc} - g f(N_{exc})$ avec $f(N_{exc})$ une fonction dépendant uniquement du nombre d’excitations (ce qui paraît raisonnable puisqu’il est possible de diagonaliser l’Hamiltonien \mathcal{H}_{TC} par blocs indexés par N_{exc}) nous aurons alors au point de couplage $g^{(N_{exc})}$:

$$\omega N_{exc} - g^{(N_{exc})} f(N_{exc}) = \omega(N_{exc} + 1) - g^{(N_{exc})} f(N_{exc} + 1) \quad (4.41)$$

et par conséquent :

$$f(N_{exc} + 1) = \frac{\omega}{g^{(N_{exc})}} + f(N_{exc}), \quad (4.42)$$

qui se généralise immédiatement :

$$f(N_{exc} + k) = \omega \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{g^{(N_{exc}+l)}} + f(N_{exc}). \quad (4.43)$$

Nous pouvons donc en déduire le comportement du splitting $\Delta E_{N_{exc}+k} = E_{N_{exc}+k}^- - E_{N_{exc}}$:

$$\Delta E_{N_{exc}+k} = \omega \left(k - \sum_{l=0}^{k-1} \frac{g}{g^{(N_{exc}+l)}} \right). \quad (4.44)$$

Or, l'état à N_{exc} excitations ne sera l'état fondamental que pour $g^{(N_{exc})} \leq g \leq g^{(N_{exc}+1)}$, ainsi grâce aux résultats des équations (4.39) et (4.40), nous en déduisons :

$$\begin{aligned} \Delta E_{N_{exc}+k} &\xrightarrow{N_{exc} \rightarrow \infty} 0 \\ \Delta E_{N_{exc}+k} &\xrightarrow{N_{at} \rightarrow \infty} 0, \end{aligned} \quad (4.45)$$

que nous voyons également apparaître sur la figure 4.18 sur laquelle ont été tracés les splitting entre l'état fondamental et le premier état excité en fonction du couplage g/ω pour différentes valeurs du nombre d'atomes. Nous voyons donc que la hauteur des dents de scie est d'autant plus faible que N_{at} et/ou g/ω sont importants.

Nous avons donc dégagé plusieurs comportements du spectre, sans même avoir d'idée de la forme de l'état fondamental. Notamment le fait que le nombre d'excitations varie d'autant plus rapidement et le splitting entre niveaux est d'autant plus faible, que le couplage lumière matière et/ou le nombre d'atomes est élevé.

Expression approchée du fondamental du modèle de Tavis-Cummings en taille finie

En limite thermodynamique, pour ce modèle, nous avons vu que le fondamental devait être une infinité de fois dégénéré et son expression était un produit tensoriels entre états cohérents pour la partie photonique et la partie atomique. Il paraît alors naturel de chercher l'état fondamental sous la forme d'un état cohérent pour la partie photonique et

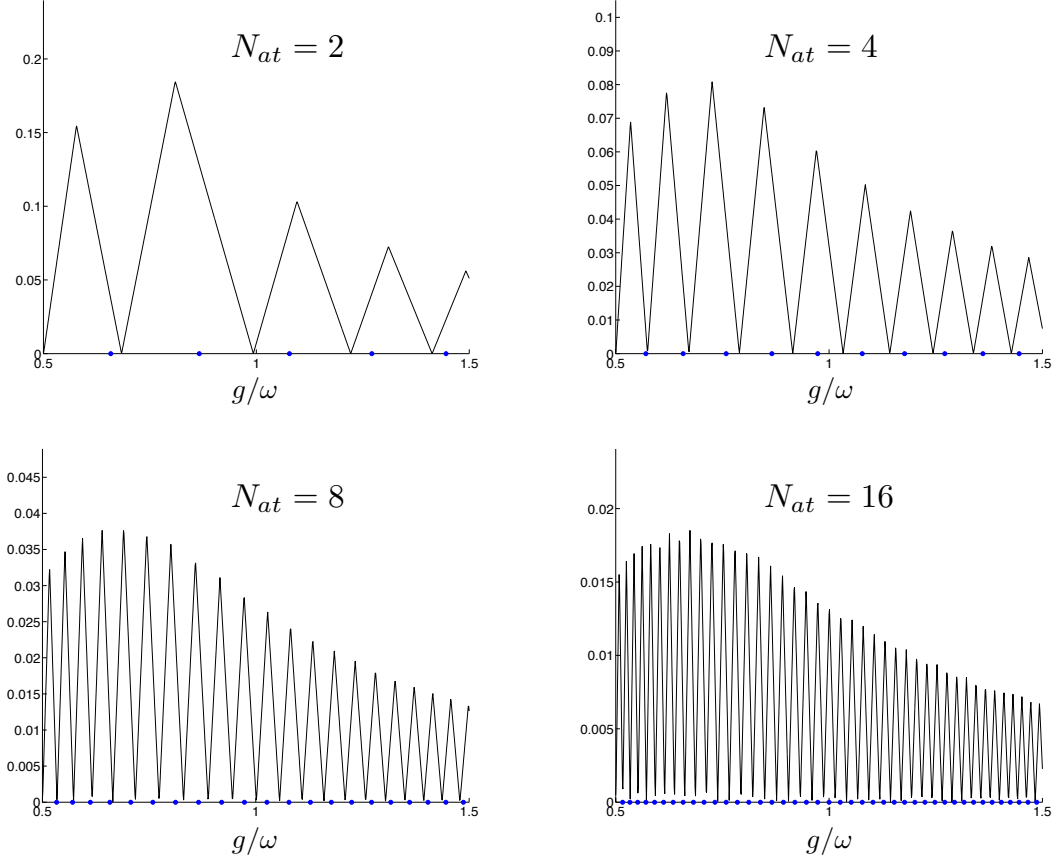


FIGURE 4.18 – Splitting entre le premier état excité et le fondamental en fonction du couplage g/ω pour $N_{at} = 2$ (a), 4(b), 8(c), 16(d) et couplages pour lesquelles les changements de fondamental devraient avoir lieu d’après l’équation (4.38) (points bleus). Nous voyons que la hauteur des dents de scie est d’autant plus faibles et les points de changement d’autant plus rapprochés que g/ω et/ou N_{at} sont importants. Nous remarquons également que l’expression (4.38) est d’autant plus précise pour cette gamme de paramètre, ce qui est logique puisque nous nous sommes servis de l’expression en champ moyen du nombre d’excitations pour la trouver.

d’un état cohérent de spin pour la partie atomique (exactement dans le même esprit que l’état variationnel utilisé pour le modèle de Dicke). Les calculs sont tout à fait similaires à ceux du modèle de Dicke et nous trouvons une infinité d’états dégénérés, indexés par l’angle ϕ introduit dans la définition des états cohérents :

$$|\Psi_\phi\rangle = \left| -\frac{g\sqrt{S}}{\omega} \sqrt{\frac{1-\mu^2}{2}} e^{i\phi} \right\rangle_{phot} \otimes \left| \sqrt{\frac{1+\mu}{1-\mu}} e^{-i\phi} \right\rangle_{spin}, \quad (4.46)$$

avec $\mu = \omega\omega_0/(g^{(N_{exc})})^2$ et $S = N_{at}/2$. Si nous développons cette expression nous aurons alors des états de la forme :

$$|\Psi_\phi\rangle = \sum_{k,l} c_{k,l} e^{i(k+l)\phi} |k\rangle_{phot} \otimes |S, l - S\rangle_{spin}, \quad (4.47)$$

qui ne respectent pas la symétrie $U(1)$, il faut alors la restaurer en sommant sur tous les angles et nous obtenons alors des états propres de l'opérateur nombre d'excitations :

$$\begin{aligned} |\Psi_{N_{exc}}\rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \exp(-i\phi N_{exc}) |\Psi_\phi\rangle \\ |\Psi_{N_{exc}}\rangle &= N^{-1} \sum_{k=0}^{\min(N_{at}, N_{exc})} c_k |N_{exc} - k\rangle_{phot} \otimes |S, k - S\rangle_{spin}, \end{aligned} \quad (4.48)$$

avec :

$$\begin{aligned} c_k &= \sqrt{\binom{2S}{k} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k!}} \left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{-k/2} \left(S \frac{1-\mu^2}{2\mu}\right)^{(N_{exc}-k)/2}}, \\ N &= \sqrt{\sum_{k=0}^{\min(N_{at}, N_{exc})} |c_k|^2}. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Nous voyons ainsi que les états propres de l'Hamiltonien de Tavis-Cummings correspondent à une somme continue d'états cohérents. Nous avons tracé sur la figure 4.19 le recouvrement entre ces états et l'état fondamental calculé numériquement, nous voyons que les deux états sont très proches l'un de l'autre car leur recouvrement est supérieur à 96%, sauf pour certaines plages de couplages (pour lesquelles ce recouvrement est nul), ce qui s'explique par le fait que nous utilisons pour N_{exc} une expression approchée $N_{exc} = E(|\alpha|^2 + |\beta|^2)$ avec $E(X)$ la fonction partie entière et α et β les cohérences photoniques et atomiques calculées en limite thermodynamique. Cet état variationnel permet ainsi de décrire qualitativement (et quantitativement) le comportement de l'état fondamental. Nous avons tracé sur la figure 4.20 la valeur moyenne des observables pertinentes pour l'étude de ce modèle en nous servant de diagonalisation numérique d'une part et de l'expression variationnelle (4.48) d'autre part : nous voyons que l'accord est très bon entre les la simulation numérique et l'expression analytique. Nous avons tracé sur la figure 4.21 la représentation Q des matrices densité photonique et atomiques réduite du fondamental numérique pour différents couplages : le fondamental possède bien la

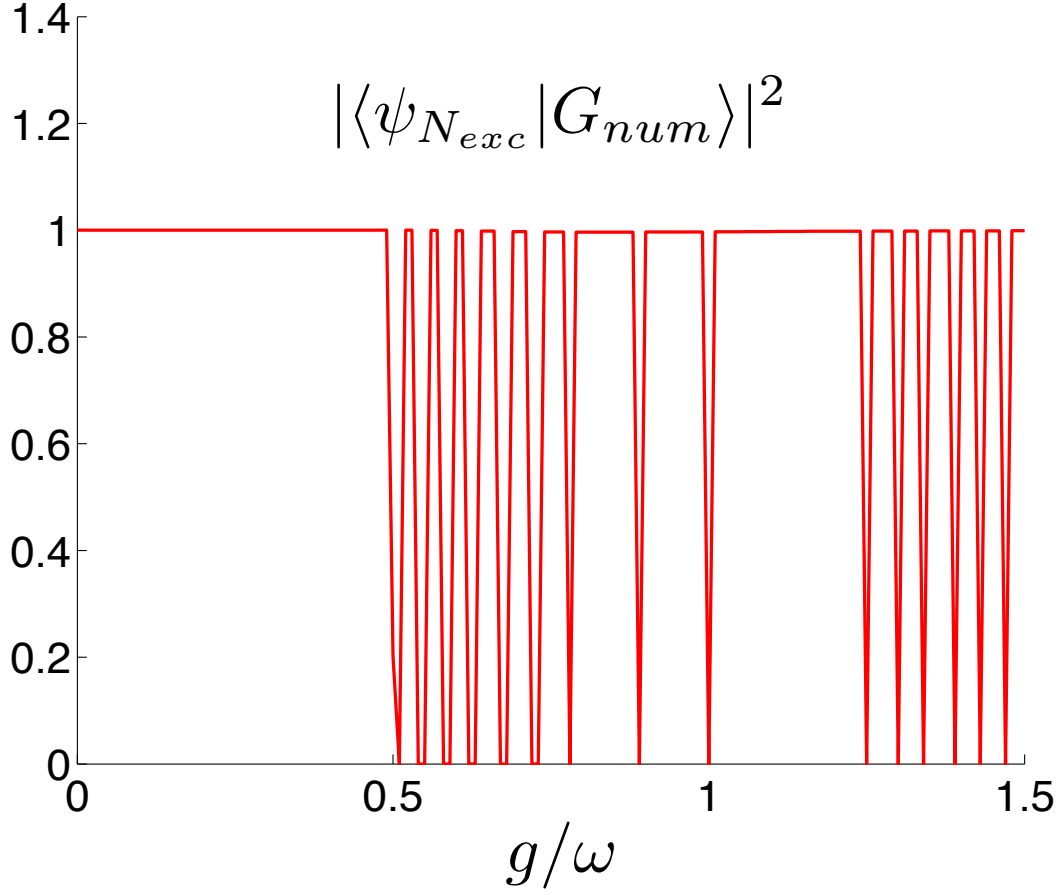


FIGURE 4.19 – Recouvrement entre l'état fondamental variationnel (4.48) et l'état fondamental calculé numériquement pour $N_{at} = 8$ atomes, à résonance ($\omega = \omega_0$).

symétrie circulaire à laquelle nous nous attendions aux vues des discussions précédents, notamment de l'expression (4.48). Se pose alors la question de la brisure spontanée de symétrie en taille finie dans ce modèle.

Brisure spontanée de symétrie dans le cadre du modèle de Tavis-Cummings

Tout comme dans le cadre du modèle de Dicke, une brisure de symétrie a lieu lors d'une mesure : lorsque la cohérence de l'état fondamental du système est mesurée, le système est projeté sur un état $|\Psi_\phi\rangle$ (cf. eq. (4.46)) qui n'est pas $U(1)$ symétrique, dont l'angle ϕ est aléatoire en raison des fluctuations quantiques. Cet état n'est cependant pas état propre de l'Hamiltonien de Tavis-Cummings, c'est une superposition d'états à

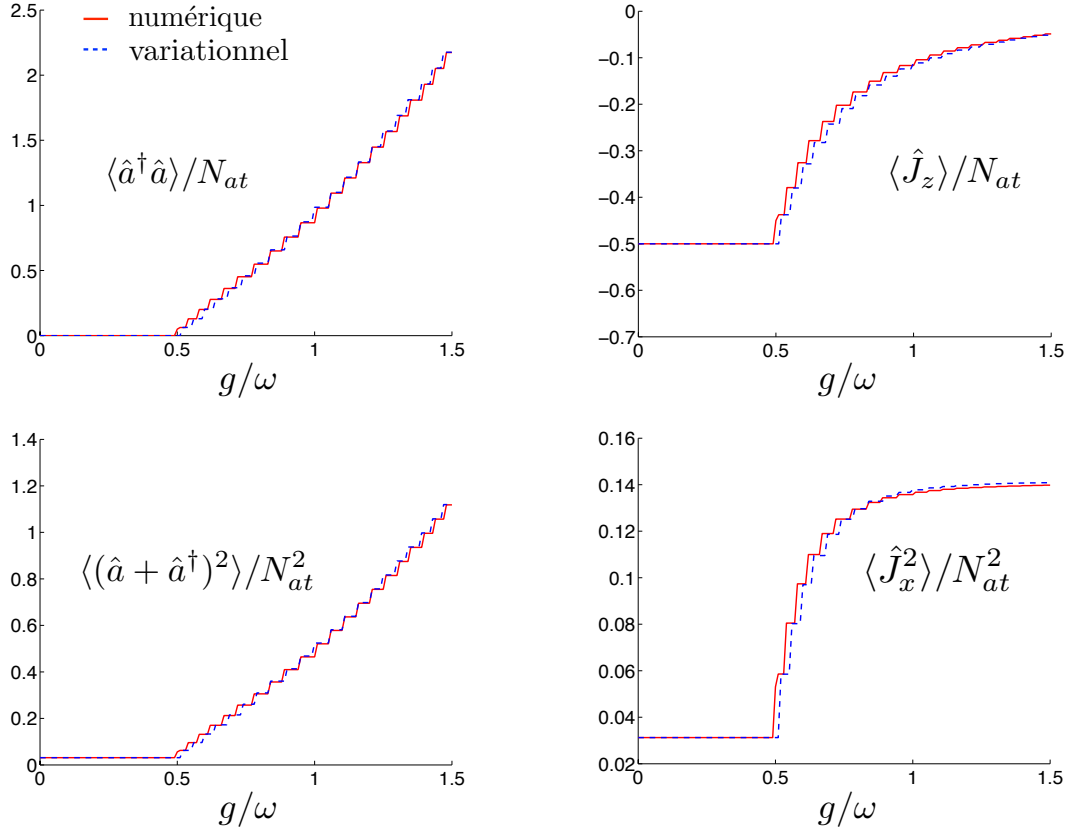


FIGURE 4.20 – Valeur moyenne d’observables pertinentes dans l’étude du modèle de Tavis-Cummings en régime de couplage ultrafort, obtenues avec l’état fondamental variationnel (4.48) (en bleu) et l’état fondamental calculé numériquement (en rouge) pour $N_{at} = 8$ atomes, à résonance ($\omega = \omega_0$).

nombre d’excitations bien définis (qui sont eux états propres de \mathcal{H}_{TC}) :

$$\begin{aligned}
 |\Psi_\phi\rangle &= \sum_{N_{exc}} \exp(+i\phi N_{exc}) |\Psi_{N_{exc}}\rangle \\
 |\Psi_\phi\rangle &= \sum_i c_i |\Psi_{TC}^i\rangle,
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

avec $|\Psi_{TC}^i\rangle$, les états propres de \mathcal{H}_{TC} tels que $\mathcal{H}_{TC} |\Psi_{TC}^i\rangle = E_i |\Psi_{TC}^i\rangle$. Ainsi, l’évolution temporelle des observables va comporter plusieurs fréquences, qui correspondent aux fréquences propres de chacun des états de la combinaison linéaire (4.50). Cependant, de la même manière qu’il existait deux états quasi-dégénérés pour le modèle de Dicke, les états propres du modèle de Tavis-Cummings qui forment l’état $|\Psi_\phi\rangle$ sont également quasi-

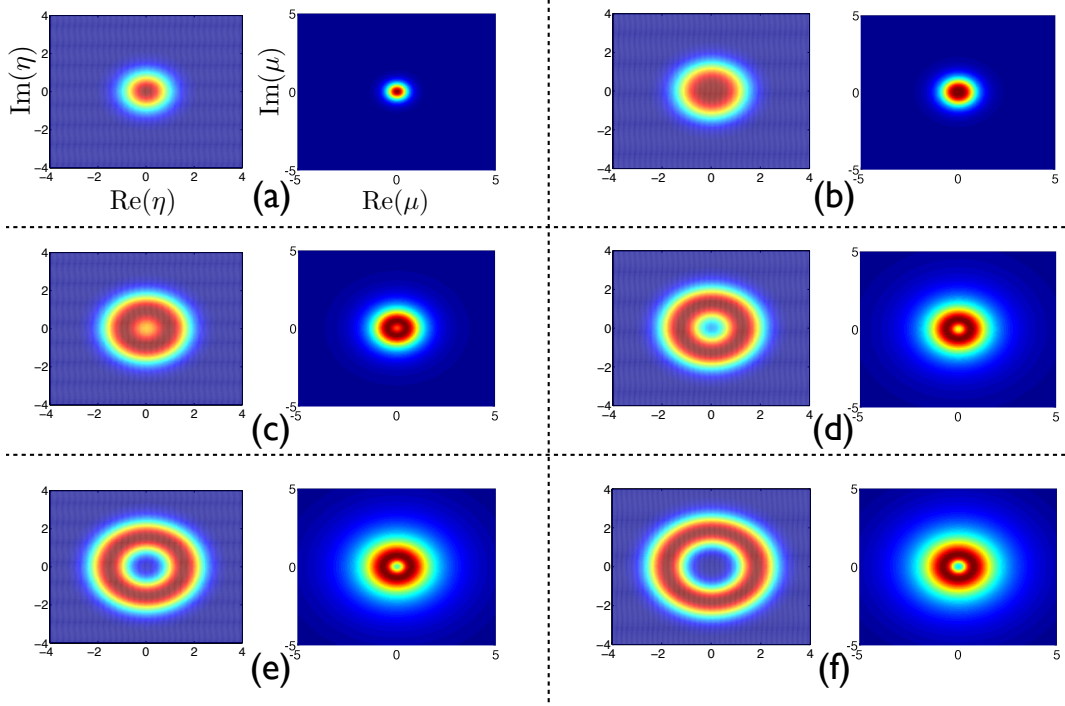


FIGURE 4.21 – Représentations Q des matrices densité photonique réduite (figure de gauche) et atomique (figure de droite) pour $N_{at} = 4$ et $g/\omega = 0.25$ (a), 0.54 (b), 0.62 (c), 0.73 (d), 0.85 (e), 0.98 (f). Nous voyons qu'à mesure que le couplage lumière augmente (i.e. que le nombre d'excitations également), le rayon des anneaux augmente, ce qui est bien consistant avec une augmentation des fluctuations suivant x et y pour les spins et suivants les deux quadratures pour les photons. Le rayon des anneaux augmente de manière discontinue (ce qui est lié à la continuité par morceaux du nombre d'excitations en fonction de g/ω).

dégénérés pour $N_{at} \gg 1$ et/ou $g \gg \omega, \omega_0$, comme nous en avons discuté précédemment. Ainsi, l'état du système va évoluer d'autant plus lentement que le couplage lumière matière et/ou le nombre d'atomes sera important. Ce phénomène est illustré sur la figure 4.22 sur laquelle a été tracée la représentation Q de la matrice densité réduite pour la partie photonique, à différents instants de l'évolution temporelle, en prenant comme état de départ $|\Psi_{\phi=\pi/4}\rangle$.

Susceptibilité du modèle de Tavis-Cummings

De la même manière que le fondamentale du modèle de Dicke est susceptible à des perturbations dans la direction de couplage (que ce soit des perturbations photoniques

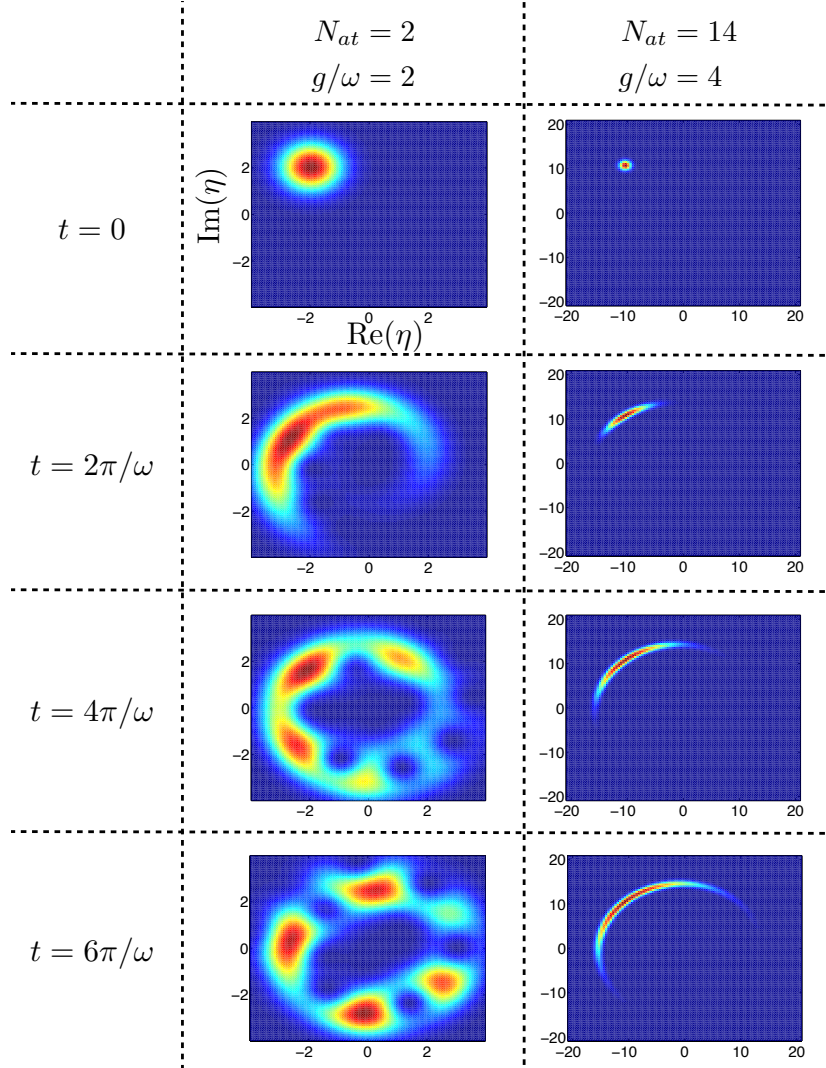


FIGURE 4.22 – Représentations Q de la matrice densité photonique réduite pour $N_{at} = 2$ et $g/\omega = 2$ (colonne de gauche), $N_{at} = 14$ et $g/\omega = 4$ (colonne de droite) à $t = 0$ (première ligne), $2\pi/\omega$ (deuxième ligne), $4\pi/\omega$ (troisième ligne), $6\pi/\omega$ (quatrième ligne). Nous voyons que pour $N_{at} = 2$ et $g/\omega = 2$ la symétrie circulaire se rétablit rapidement, tandis que pour $N_{at} = 14$ et $g/\omega = 4$ la symétrie reste brisée beaucoup plus longtemps. ceci est lié à la discussion sur le modèle de Dicke en rapport avec la molécule d’ammoniaque : le système cherche à rétablir la symétrie $U(1)$ en moyenne dans le temps, cependant comme les fréquences en jeu sont d’autant plus faibles que N_{at} et g/ω sont importants, le système met d’autant plus de temps à rétablir cette symétrie.

ou atomiques), le modèle de Tavis-Cummings l’est également. La nouveauté ici vient de la symétrie $U(1)$ du modèle de Tavis-Cummings sans perturbation qui est continue. Or,

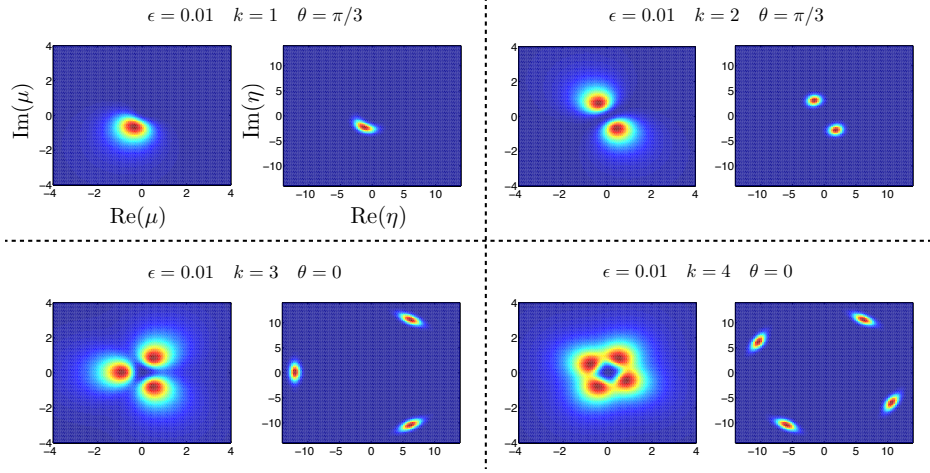


FIGURE 4.23 – Représentation Q des matrices densité atomique (figure de gauche) et photonique (figure de droite) réduites pour des termes de perturbation ayant une symétrie $\mathbb{Z}_k \subset U(1)$. Nous voyons qu'en appliquant une telle perturbation à l'Hamiltonien de Dicke il est possible de générer des chats à $2k$ "pattes" (un chat traditionnel possédant deux lobes ayant 4 pattes i.e. 2 pattes par lobe).

les groupes \mathbb{Z}_k (rotation d'un angle $2\pi/k$ (2π)) sont des sous groupes du groupe $U(1)$ (rotation d'un angle arbitraire θ (2π)) ce qui signifie que si nous appliquons au système une perturbation du type $\epsilon((\hat{a})^k + (\hat{a}^\dagger)^k)$ qui possède une symétrie \mathbb{Z}_k , cela restreindra le fondamental à se trouver au sein de ce sous-groupe. Ceci aura pour conséquence de créer des chats de Schrödinger à k lobes : si nous faisons le calcul des états fondamentaux nous trouverions k solutions aux équations de champ moyen qui correspondraient à chacun des lobes, puis il faudrait créer une superposition de ceux-ci pour trouver le fondamental du système à taille finie. Ces considérations sont illustrées sur la figure 4.23 sur laquelle ont été représentés les représentations Q de l'état fondamental de l'Hamiltonien $\mathcal{H}/\hbar = \mathcal{H}_{TC}/\hbar + \epsilon(e^{i\theta}(\hat{a})^k + e^{-i\theta}(\hat{a}^\dagger)^k)$ pour différentes valeurs de k , θ et ϵ . Nous remarquons sur cette figure que les états fondamentaux ne sont pas tout à fait une superpositions d'états cohérents : les lobes ne sont pas circulaires, ce qui s'explique par la compétition entre \mathcal{H}_{TC} et $\epsilon(e^{i\theta}(\hat{a})^k + e^{-i\theta}(\hat{a}^\dagger)^k)$ qui cherchent respectivement à délocaliser la fonction d'onde sur l'anneau complet et à la localiser au voisinage des angles $\theta = 2m\pi/k$ ($m \in \mathbb{Z}$).

Conclusion et perspectives

Dans cette thèse après une introduction à l'Electrodynamique quantique en cavité et des circuits dans le chapitre 1 et une introduction aux modèles de type Dicke et au transition de phases superradiantes dans le chapitre 2, dans les chapitres suivants, nous avons considéré les problème de transitions de phases quantiques avec des configurations originales.

Dans le chapitre 3, nous avons exploré la physique des transitions de phase superradiantes avec un ensemble de système à 3 niveaux (sans interaction atome-atome). Nous avons montré que dans ce cas, le "No-go theorem" pour les transitions de phase superradiantes n'est plus valable, la transition de phase étant cette fois-ci du premier ordre. Ce travail pourrait être poursuivi en tenant compte de plus de niveaux et de plus de modes pour voir l'effet de ces degrés de liberté supplémentaire sur la transition de phase. Il serait également intéressant d'étudier l'effet du potentiel Coulombien (interaction atomes-atomes) sur la transition de phase dans une configuration multi-niveaux. Une autre piste serait de s'intéresser à des transitions de phase "métastables" en considérant des transitions entre états excités métastables plutôt que des transitions entre l'état fondamental et l'état excité. Cette piste paraît intéressante car, aux vues de la règle de somme TRK, la force d'oscillateur pour une transition donnée doit être inférieure à 1 uniquement si il s'agit d'une transition entre le fondamental et un état excité. De plus, cette situation est couramment utilisée en cavity-QED, dans le groupe de Serge Haroche par exemple, dans lequel des atomes sont préparés dans un état de Rydberg, qui est un état excité métastable de durée de vie longue.

Dans le chapitre 4, nous nous sommes intéressés à un modèle de Dicke dans lequel les deux quadratures bosoniques sont couplées au qubit. Nous avons, montré qu'il était possible de réaliser un dispositif décrit par un tel Hamiltonien en choisissant judicieusement un atome artificiel couplé à la fois inductivement et capacitivement à la ligne de transmission ce qui permet de contrôler la symétrie de l'Hamiltonien décrivant le système. En ayant des couplages inductifs et capacitifs de même amplitude, il est même possible de faire

disparaître de l'Hamiltonien de Dicke les termes anti-résonnants (même en couplage ultrafort dans lequel ils ne sont pas négligeables) conférant ainsi au système une symétrie continue (plutôt que l'habituel symétrie de parité discrète). Cette possibilité de contrôle de la symétrie offre une plus grande richesse au diagramme de phase du modèle en limite thermodynamique ($N_{at} \rightarrow \infty$) laissant apparaître quatre phases différentes : la phase normale, une phase superradiante électrique (de charge), une phase superradiante magnétique (de flux), ainsi qu'une phase superradiante électromagnétique (de charge et de flux en même temps). Les phases superradiantes de charge et de flux ont déjà été prédites avec un ensemble de CPB et un ensemble de Fluxonium couplées à une ligne de transmission [103, 104]. La nouveauté ici est la phase superradiante électromagnétique qui résulte de la brisure spontanée d'une symétrie continue laissant apparaître un mode de Goldstone au sein du spectre des excitations. En taille finie, cette brisure spontanée de symétrie se traduit par une symétrie différente de l'état fondamental : ce n'est plus un état chat de Schrödinger constitué de deux lobes dans l'espace des phases (qui résultaient de la symétrie de parité) mais d'un anneau non centré en zéro (une superposition d'états cohérents, qui résulte de la symétrie $U(1)$). Comme le groupe de symétrie $U(1)$ contient tous les groupes de symétrie \mathbb{Z}_k (rotations d'angle $2\pi/k$, $k \in \mathbb{Z}$), il est possible en appliquant une perturbation de type $\epsilon((\hat{a})^k + (\hat{a}^\dagger)^k)$ d'imposer au fondamental du système une symétrie moindre et de générer ainsi des états chats de Schrödinger à $2k$ pattes. Le mode de Goldstone quant à lui se manifeste en taille finie par une densité d'état de plus en plus importante au voisinage du fondamental d'autant plus importante que le nombre d'atomes et/ou le couplage lumière matière sont importants. L'Hamiltonien de Tavis-Cummings et l'Hamiltonien BCS ayant une symétrie identique et étant très semblables, il est possible de leur donner une forme similaire en éliminant adiabatiquement les photons et en exprimant les opérateurs de création et d'annihilation fermioniques en termes de matrices de Pauli. Les deux modèles se ramènent alors à un modèle de type XY. Il est alors intéressant d'explorer l'existence possible d'un effet Josephson entre deux cavités supraconductrices décrites par un modèle de Tavis-Cummings qui interagissent via un terme tunnel (obtenu en connectant les cavités à la fois inductivement et capacitivement), qui est un projet que nous sommes actuellement entrain de réaliser.

Dans le cadre plus général des transitions de phase superradiantes, une question fondamentale ne possède toujours pas de réponse : comment mesurer les excitations photoniques et atomiques se trouvant dans le fondamental ? En effet, ces excitations ne pouvant pas s'échapper de la cavité (car cela reviendrait à exciter le système), la question de la

mesure se pose de manière évidente. Une idée serait d'utiliser un qubit "espion" faiblement couplé à la cavité (afin de perturber le moins possible la phase superradiante) sur lequel des mesures pourront être effectuées. Il faudra alors se demander quelles seront les observables intéressantes à mesurer et quelles informations celles-ci nous apporteront sur l'état fondamental du système. Nous sommes par ailleurs entraînés de travailler activement sur ce projet qui semble très prometteur.

Bibliographie

- [1] Y. Aharonov and D. Bohm. ‘Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory.’ *Physical Review*, **115**, 485–491 (1959), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.115.485>.
- [2] Y. Aharonov and D. Bohm. ‘Further Considerations on Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory.’ *Physical Review*, **123**, 1511–1524 (1961), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.123.1511>.
- [3] L. Amico, R. Fazio, A. Osterloh, and V. Vedral. ‘Entanglement in many-body systems.’ *Reviews of Modern Physics*, **80**, 517–576 (2008), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.80.517>.
- [4] P. W. Anderson. ‘Plasmons, Gauge Invariance, and Mass.’ *Physical Review*, **130**, 439–442 (1963), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.130.439>.
- [5] P. W. Anderson. ‘More Is Different.’ *Science*, **177**, 393–396 (1972), URL <http://www.sciencemag.org/content/177/4047/393>.
- [6] P. W. Anderson and J. M. Rowell. ‘Probable Observation of the Josephson Superconducting Tunneling Effect.’ *Physical Review Letters*, **10**, 230–232 (1963), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.10.230>.
- [7] A. V. Andreev, V. I. Emel’yanov, and Y. A. Il’inskiĭ. ‘Collective spontaneous emission (Dicke superradiance).’ *Soviet Physics Uspekhi*, **23**, 493 (1980), URL <http://iopscience.iop.org/0038-5670/23/8/R04>.
- [8] S. Ashhab and F. Nori. ‘Qubit-oscillator systems in the ultrastrong-coupling regime and their potential for preparing nonclassical states.’ *Physical Review A*, **81**, 042311 (2010), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.81.042311>.
- [9] A. Baksic and C. Ciuti. ‘Controlling Discrete and Continuous Symmetries in “Superradiant” Phase Transitions with Circuit QED Systems.’ *Physical Review Letters*, **112**, 173601 (2014), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.112.173601>.

- [10] A. Baksic, P. Nataf, and C. Ciuti. ‘Superradiant phase transitions with three-level systems.’ *Physical Review A*, **87**, 023813 (2013), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.87.023813>.
- [11] P. Barbara, A. B. Cawthorne, S. V. Shitov, and C. J. Lobb. ‘Stimulated Emission and Amplification in Josephson Junction Arrays.’ *Physical Review Letters*, **82**, 1963–1966 (1999), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.82.1963>.
- [12] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer. ‘Theory of Superconductivity.’ *Physical Review*, **108**, 1175–1204 (1957), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.108.1175>.
- [13] K. Baumann, C. Guerlin, F. Brennecke, and T. Esslinger. ‘Dicke quantum phase transition with a superfluid gas in an optical cavity.’ *Nature*, **464**, 1301–1306 (2010), URL <http://www.nature.com/nature/journal/v464/n7293/full/nature09009.html>.
- [14] K. Baumann, R. Mottl, F. Brennecke, and T. Esslinger. ‘Exploring Symmetry Breaking at the Dicke Quantum Phase Transition.’ *Physical Review Letters*, **107**, 140402 (2011), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.107.140402>.
- [15] F. Beaudoin, J. M. Gambetta, and A. Blais. ‘Dissipation and ultrastrong coupling in circuit QED.’ *Physical Review A*, **84**, 043832 (2011), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.84.043832>.
- [16] M. G. Benedict. *Super-radiance : Multiatomic Coherent Emission*. CRC Press, Bristol ; Philadelphia (1996).
- [17] H. A. Bethe. ‘The Electromagnetic Shift of Energy Levels.’ *Physical Review*, **72**, 339–341 (1947), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.72.339>.
- [18] M. J. Bhaseen, J. Mayoh, B. D. Simons, and J. Keeling. ‘Dynamics of nonequilibrium Dicke models.’ *Physical Review A*, **85**, 013817 (2012), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.85.013817>.
- [19] A. Blais, R.-S. Huang, A. Wallraff, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf. ‘Cavity quantum electrodynamics for superconducting electrical circuits : An architecture for quantum computation.’ *Physical Review A*, **69**, 062320 (2004), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.69.062320>.
- [20] N. Bohr. ‘I. On the constitution of atoms and molecules.’ *Philosophical Magazine Series 6*, **26**, 1–25 (1913), URL <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/14786441308634955>.

- [21] R. Bonifacio, P. Schwendimann, and F. Haake. ‘Quantum Statistical Theory of Superradiance. I.’ *Physical Review A*, **4**, 302–313 (1971), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.4.302>.
- [22] R. Botet and R. Jullien. ‘Large-size critical behavior of infinitely coordinated systems.’ *Physical Review B*, **28**, 3955–3967 (1983), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.28.3955>.
- [23] R. Botet, R. Jullien, and P. Pfeuty. ‘Size Scaling for Infinitely Coordinated Systems.’ *Physical Review Letters*, **49**, 478–481 (1982), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.49.478>.
- [24] V. Bouchiat, D. Vion, P. Joyez, D. Esteve, and M. H. Devoret. ‘Quantum coherence with a single Cooper pair.’ *Physica Scripta*, **1998**, 165 (1998), URL <http://iopscience.iop.org/1402-4896/1998/T76/024>.
- [25] J. Bourassa, J. M. Gambetta, A. A. Abdumalikov, O. Astafiev, Y. Nakamura, and A. Blais. ‘Ultrastrong coupling regime of cavity QED with phase-biased flux qubits.’ *Physical Review A*, **80**, 032109 (2009), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.80.032109>.
- [26] D. Braak. ‘Integrability of the Rabi Model.’ *Physical Review Letters*, **107**, 100401 (2011), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.107.100401>.
- [27] T. Brandes. ‘Excited-state quantum phase transitions in Dicke superradiance models.’ *Physical Review E*, **88**, 032133 (2013), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.88.032133>.
- [28] H.-P. Breuer. *The Theory of Open Quantum Systems*. Oxford University Press, Oxford ; New York (2002).
- [29] M. Brune, E. Hagley, J. Dreyer, X. Maître, A. Maali, C. Wunderlich, J. M. Raimond, and S. Haroche. ‘Observing the Progressive Decoherence of the “Meter” in a Quantum Measurement.’ *Physical Review Letters*, **77**, 4887–4890 (1996), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.77.4887>.
- [30] M. Brune, F. Schmidt-Kaler, A. Maali, J. Dreyer, E. Hagley, J. M. Raimond, and S. Haroche. ‘Quantum Rabi Oscillation : A Direct Test of Field Quantization in a Cavity.’ *Physical Review Letters*, **76**, 1800–1803 (1996), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.76.1800>.
- [31] H. J. Carmichael, C. W. Gardiner, and D. F. Walls. ‘Higher order corrections to the Dicke superradiant phase transition.’ *Physics Letters A*, **46**, 47–48 (1973), URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0375960173906798>.

- [32] J. Casanova, G. Romero, I. Lizuain, J. J. García-Ripoll, and E. Solano. ‘Deep Strong Coupling Regime of the Jaynes-Cummings Model.’ *Physical Review Letters*, **105**, 263603 (2010), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.105.263603>.
- [33] C. Ciuti, G. Bastard, and I. Carusotto. ‘Quantum vacuum properties of the intersubband cavity polariton field.’ *Physical Review B*, **72**, 115303 (2005), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.72.115303>.
- [34] C. Ciuti and P. Nataf. ‘Comment on “Superradiant Phase Transitions and the Standard Description of Circuit QED”.’ *Physical Review Letters*, **109**, 179301 (2012), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.109.179301>.
- [35] J. Clarke, A. N. Cleland, M. H. Devoret, D. Esteve, and J. M. Martinis. ‘Quantum Mechanics of a Macroscopic Variable : The Phase Difference of a Josephson Junction.’ *Science*, **239**, 992–997 (1988), URL <http://www.sciencemag.org/content/239/4843/992>.
- [36] A. A. Clerk, M. H. Devoret, S. M. Girvin, F. Marquardt, and R. J. Schoelkopf. ‘Introduction to quantum noise, measurement, and amplification.’ *Reviews of Modern Physics*, **82**, 1155–1208 (2010), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.82.1155>.
- [37] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg. *Photons et atomes - Introduction à l’électrodynamique quantique*. EDP Sciences (1987).
- [38] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg. *Processus d’interaction entre photons et atomes*. EDP Sciences (1996).
- [39] J. Dalibard. ‘Cohérence Quantique et Dissipation (cours de la FIP, ENS).’ http://www.phys.ens.fr/~dalibard/index_en.html.
- [40] R. G. DeVoe and R. G. Brewer. ‘Observation of Superradiant and Subradiant Spontaneous Emission of Two Trapped Ions.’ *Physical Review Letters*, **76**, 2049–2052 (1996), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.76.2049>.
- [41] M. Devoret. ‘Cours au Collège de France.’ <http://www.physinfo.fr/lectures.html>.
- [42] M. Devoret, S. Girvin, and R. Schoelkopf. ‘Circuit-QED : How strong can the coupling between a Josephson junction atom and a transmission line resonator be?’ *Annalen der Physik*, **16**, 767–779 (2007), URL <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/andp.200710261/abstract>.

- [43] M. Devoret, B. Huard, R. Schoelkopf, and L. F. Cugliandolo. *Quantum Machines : Measurement and Control of Engineered Quantum Systems : Lecture Notes of the Les Houches Summer School : Volume 96, July 2011*. OUP Oxford (2014).
- [44] M. H. Devoret, J. M. Martinis, and J. Clarke. ‘Measurements of Macroscopic Quantum Tunneling out of the Zero-Voltage State of a Current-Biased Josephson Junction.’ *Physical Review Letters*, **55**, 1908–1911 (1985), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.55.1908>.
- [45] M. H. Devoret, A. Wallraff, and J. M. Martinis. ‘Superconducting Qubits : A Short Review.’ *arXiv :cond-mat/0411174* (2004), URL <http://arxiv.org/abs/cond-mat/0411174>.
- [46] R. H. Dicke. ‘Coherence in Spontaneous Radiation Processes.’ *Physical Review*, **93**, 99–110 (1954), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.93.99>.
- [47] F. Dimer, B. Estienne, A. S. Parkins, and H. J. Carmichael. ‘Proposed realization of the Dicke-model quantum phase transition in an optical cavity QED system.’ *Physical Review A*, **75**, 013804 (2007), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.75.013804>.
- [48] P. A. M. Dirac. ‘The quantum theory of the emission and absorption of radiation.’ *Proc. Roy. Soc. London A*, **114**, 243 (1927).
- [49] A. Einstein. ‘Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt.’ *Annalen der Physik*, **322**, 132–148 (1905), URL <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/andp.19053220607/abstract>.
- [50] A. Einstein. ‘Zur Elektrodynamik bewegter Körper.’ *Annalen der Physik*, **322**, 891–921 (1905), URL <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/andp.19053221004/abstract>.
- [51] A. Einstein. ‘Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie.’ *Annalen der Physik*, **354**, 769–822 (1916), URL <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/andp.19163540702/abstract>.
- [52] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. ‘Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?’ *Physical Review*, **47**, 777–780 (1935), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.47.777>.
- [53] C. Emary and T. Brandes. ‘Chaos and the quantum phase transition in the Dicke model.’ *Physical Review E*, **67**, 066203 (2003), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.67.066203>.

- [54] C. Emary and T. Brandes. ‘Quantum Chaos Triggered by Precursors of a Quantum Phase Transition : The Dicke Model.’ *Physical Review Letters*, **90**, 044101 (2003), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.90.044101>.
- [55] D. Esteve, J.-M. Raimond, and J. D. Ph.D. *Quantum Entanglement and Information Processing, Volume LXXIX : Lecture Notes of the Les Houches Summer School 2003*. Elsevier Science, Amsterdam ; Boston, 1 edition edition (2004).
- [56] E. Fermi. ‘Quantum Theory of Radiation.’ *Reviews of Modern Physics*, **4**, 87–132 (1932), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.4.87>.
- [57] J. M. Fink, R. Bianchetti, M. Baur, M. Göppl, L. Steffen, S. Filipp, P. J. Leek, A. Blais, and A. Wallraff. ‘Dressed Collective Qubit States and the Tavis-Cummings Model in Circuit QED.’ *Phys. Rev. Lett.*, **103**, 083601 (2009), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.103.083601>.
- [58] K. Gawędzki and K. RzaŹszewski. ‘No-go theorem for the superradiant phase transition without dipole approximation.’ *Physical Review A*, **23**, 2134–2136 (1981), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.23.2134>.
- [59] J.-P. Gazeau. *Coherent States in Quantum Physics*. Wiley-VCH, Weinheim : Chichester, 1 edition edition (2009).
- [60] R. J. Glauber. ‘Photon Correlations.’ *Physical Review Letters*, **10**, 84–86 (1963), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.10.84>.
- [61] R. J. Glauber. ‘The Quantum Theory of Optical Coherence.’ *Physical Review*, **130**, 2529–2539 (1963), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.130.2529>.
- [62] A. Glick, H. Lipkin, and N. Meshkov. ‘Validity of many-body approximation methods for a solvable model : (III). Diagram summations.’ *Nuclear Physics*, **62**, 211 – 224 (1965), URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0029558265908643>.
- [63] H. Goto and K. Ichimura. ‘Quantum phase transition in the generalized Dicke model : Inhomogeneous coupling and universality.’ *Physical Review A*, **77**, 053811 (2008), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.77.053811>.
- [64] M. Gross, C. Fabre, P. Pillet, and S. Haroche. ‘Observation of Near-Infrared Dicke Superradiance on Cascading Transitions in Atomic Sodium.’ *Physical Review Letters*, **36**, 1035–1038 (1976), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.36.1035>.

- [65] M. Gross and S. Haroche. ‘Superradiance : An essay on the theory of collective spontaneous emission.’ *Physics Reports*, **93**, 301–396 (1982), URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370157382901028>.
- [66] G. Gunter, A. A. Anappara, J. Hees, A. Sell, G. Biasiol, L. Sorba, S. De Liberato, C. Ciuti, A. Tredicucci, A. Leitenstorfer, and R. Huber. ‘Sub-cycle switch-on of ultrastrong light-matter interaction.’ *Nature*, **458**, 178–181 (2009), URL <http://dx.doi.org/10.1038/nature07838>.
- [67] D. Hagenmüller, S. De Liberato, and C. Ciuti. ‘Ultrastrong coupling between a cavity resonator and the cyclotron transition of a two-dimensional electron gas in the case of an integer filling factor.’ *Physical Review B*, **81**, 235303 (2010), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.81.235303>.
- [68] C. A. Hamilton. ‘Josephson voltage standards.’ *Review of Scientific Instruments*, **71**, 3611–3623 (2000), URL <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/rsi/71/10/10.1063/1.1289507>.
- [69] S. Haroche and J.-M. Raimond. *Exploring the Quantum : Atoms, Cavities, and Photons*. Oxford University Press, Oxford ; New York (2006).
- [70] M. Hayn, C. Emary, and T. Brandes. ‘Phase transitions and dark-state physics in two-color superradiance.’ *Physical Review A*, **84**, 053856 (2011), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.84.053856>.
- [71] K. Hepp and E. H. Lieb. ‘Equilibrium Statistical Mechanics of Matter Interacting with the Quantized Radiation Field.’ *Physical Review A*, **8**, 2517–2525 (1973), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.8.2517>.
- [72] K. Hepp and E. H. Lieb. ‘On the superradiant phase transition for molecules in a quantized radiation field : the dicke maser model.’ *Annals of Physics*, **76**, 360–404 (1973), URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0003491673900390>.
- [73] W. Hermanns and A. Einstein. *Einstein and the Poet : In Search of the Cosmic Man*. Branden Books (1983).
- [74] P. W. Higgs. ‘Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons.’ *Physical Review Letters*, **13**, 508–509 (1964), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.13.508>.
- [75] J. J. Hopfield. ‘Theory of the Contribution of Excitons to the Complex Dielectric Constant of Crystals.’ *Physical Review*, **112**, 1555–1567 (1958), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.112.1555>.

- [76] M. W. Johnson, M. H. S. Amin, S. Gildert, T. Lanting, F. Hamze, N. Dickson, R. Harris, A. J. Berkley, J. Johansson, P. Bunyk, E. M. Chapple, C. Enderud, J. P. Hilton, K. Karimi, E. Ladizinsky, N. Ladizinsky, T. Oh, I. Perminov, C. Rich, M. C. Thom, E. Tolkacheva, C. J. S. Truncik, S. Uchaikin, J. Wang, B. Wilson, and G. Rose. ‘Quantum annealing with manufactured spins.’ *Nature*, **473**, 194–198 (2011), URL <http://www.nature.com/nature/journal/v473/n7346/full/nature10012.html>.
- [77] B. D. Josephson. ‘Possible new effects in superconductive tunnelling.’ *Physics Letters*, **1**, 251–253 (1962), URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0031916362913690>.
- [78] Y. Kaluzny, P. Goy, M. Gross, J. M. Raimond, and S. Haroche. ‘Observation of Self-Induced Rabi Oscillations in Two-Level Atoms Excited Inside a Resonant Cavity : The Ringing Regime of Superradiance.’ *Physical Review Letters*, **51**, 1175–1178 (1983), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.51.1175>.
- [79] J. Keeling. ‘Coulomb interactions, gauge invariance, and phase transitions of the Dicke model.’ *Journal of Physics : Condensed Matter*, **19**, 295213 (2007), URL <http://iopscience.iop.org/0953-8984/19/29/295213>.
- [80] L. Kelvin. ‘on the dynamical theory of heat and light.’ *The London, Edinburgh and Dublin philosophical magazine and journal of science*, **6**, 1–40 (1901).
- [81] H. J. Kimble, M. Dagenais, and L. Mandel. ‘Photon Antibunching in Resonance Fluorescence.’ *Physical Review Letters*, **39**, 691–695 (1977), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.39.691>.
- [82] A. Klein and E. R. Marshalek. ‘Boson realizations of Lie algebras with applications to nuclear physics.’ *Reviews of Modern Physics*, **63**, 375–558 (1991), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.63.375>.
- [83] J. Koch, V. Manucharyan, M. H. Devoret, and L. I. Glazman. ‘Charging Effects in the Inductively Shunted Josephson Junction.’ *Physical Review Letters*, **103**, 217004 (2009), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.103.217004>.
- [84] J. Koch, T. M. Yu, J. Gambetta, A. A. Houck, D. I. Schuster, J. Majer, A. Blais, M. H. Devoret, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf. ‘Charge-insensitive qubit design derived from the Cooper pair box.’ *Physical Review A*, **76**, 042319 (2007), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.76.042319>.

- [85] G. Kónya, D. Nagy, G. Szirmai, and P. Domokos. ‘Finite-size scaling in the quantum phase transition of the open-system Dicke model.’ *Physical Review A*, **86**, 013641 (2012), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.86.013641>.
- [86] K. Lalumière, B. C. Sanders, A. F. van Loo, A. Fedorov, A. Wallraff, and A. Blais. ‘Input-output theory for waveguide QED with an ensemble of inhomogeneous atoms.’ *Physical Review A*, **88**, 043806 (2013), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.88.043806>.
- [87] W. E. Lamb and R. C. Retherford. ‘Fine Structure of the Hydrogen Atom by a Microwave Method.’ *Physical Review*, **72**, 241–243 (1947), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.72.241>.
- [88] N. Lambert, C. Emary, and T. Brandes. ‘Entanglement and the Phase Transition in Single-Mode Superradiance.’ *Physical Review Letters*, **92**, 073602 (2004), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.92.073602>.
- [89] N. Lambert, C. Emary, and T. Brandes. ‘Entanglement and entropy in a spin-boson quantum phase transition.’ *Physical Review A*, **71**, 053804 (2005), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.71.053804>.
- [90] A. J. Leggett. ‘Macroscopic Quantum Systems and the Quantum Theory of Measurement.’ *Progress of Theoretical Physics Supplement*, **69**, 80–100 (1980), URL <http://ptps.oxfordjournals.org/content/69/80>.
- [91] E. L. Lev Landau. *Physique théorique, vol. 1. Mécanique*. Éditions MIR, Moscou (1982).
- [92] G. N. Lewis. ‘The Conservation of Photons.’ *Nature*, **118**, 874–875 (1926).
- [93] H. Lipkin, N. Meshkov, and A. Glick. ‘Validity of many-body approximation methods for a solvable model : (I). Exact solutions and perturbation theory.’ *Nuclear Physics*, **62**, 188 – 198 (1965), URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/002955826590862X>.
- [94] V. E. Manucharyan, J. Koch, L. I. Glazman, and M. H. Devoret. ‘Fluxonium : Single Cooper-Pair Circuit Free of Charge Offsets.’ *Science*, **326**, 113–116 (2009), URL <http://www.sciencemag.org/content/326/5949/113>.
- [95] J. M. Martinis, M. H. Devoret, and J. Clarke. ‘Energy-Level Quantization in the Zero-Voltage State of a Current-Biased Josephson Junction.’ *Physical Review Letters*, **55**, 1543–1546 (1985), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.55.1543>.

- [96] N. Meshkov, A. Glick, and H. Lipkin. ‘Validity of many-body approximation methods for a solvable model : (II). Linearization procedures.’ *Nuclear Physics*, **62**, 199 – 210 (1965), URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0029558265908631>.
- [97] R. Miller, T. E. Northup, K. M. Birnbaum, A. Boca, A. D. Boozer, and H. J. Kimble. ‘Trapped atoms in cavity QED : coupling quantized light and matter.’ *Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics*, **38**, S551 (2005), URL <http://iopscience.iop.org/0953-4075/38/9/007>.
- [98] J. E. Mooij, T. P. Orlando, L. Levitov, L. Tian, C. H. van der Wal, and S. Lloyd. ‘Josephson Persistent-Current Qubit.’ *Science*, **285**, 1036–1039 (1999), <http://www.sciencemag.org/content/285/5430/1036.full.pdf>, URL <http://www.sciencemag.org/content/285/5430/1036.abstract>.
- [99] D. Nagy, G. Kónya, G. Szirmai, and P. Domokos. ‘Dicke-Model Phase Transition in the Quantum Motion of a Bose-Einstein Condensate in an Optical Cavity.’ *Physical Review Letters*, **104**, 130401 (2010), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.104.130401>.
- [100] D. Nagy, G. Szirmai, and P. Domokos. ‘Critical exponent of a quantum-noise-driven phase transition : The open-system Dicke model.’ *Physical Review A*, **84**, 043637 (2011), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.84.043637>.
- [101] Y. Nakamura, Y. A. Pashkin, and J. S. Tsai. ‘Coherent control of macroscopic quantum states in a single-Cooper-pair box.’ *Nature*, **398**, 786–788 (1999), URL <http://dx.doi.org/10.1038/19718>.
- [102] P. Nataf, A. Baksic, and C. Ciuti. ‘Double symmetry breaking and two-dimensional quantum phase diagram in spin-boson systems.’ *Physical Review A*, **86**, 013832 (2012), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.86.013832>.
- [103] P. Nataf and C. Ciuti. ‘No-go theorem for superradiant quantum phase transitions in cavity QED and counter-example in circuit QED.’ *Nature Communications*, **1**, 72 (2010), URL <http://dx.doi.org/10.1038/ncomms1069>.
- [104] P. Nataf and C. Ciuti. ‘Vacuum Degeneracy of a Circuit QED System in the Ultrastrong Coupling Regime.’ *Physical Review Letters*, **104**, 023601 (2010), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.104.023601>.
- [105] P. Nataf and C. Ciuti. ‘Protected Quantum Computation with Multiple Resonators in Ultrastrong Coupling Circuit QED.’ *Physical Review Letters*, **107**, 190402 (2011), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.107.190402>.

- [106] T. Niemczyk, F. Deppe, H. Huebl, E. P. Menzel, F. Hocke, M. J. Schwarz, J. J. Garcia-Ripoll, D. Zueco, T. Hümmer, E. Solano, A. Marx, and R. Gross. ‘Circuit quantum electrodynamics in the ultrastrong-coupling regime.’ *Nature Physics*, **6**, 772–776 (2010), URL <http://www.nature.com/nphys/journal/v6/n10/full/nphys1730.html>.
- [107] A. Osterloh, L. Amico, G. Falci, and R. Fazio. ‘Scaling of entanglement close to a quantum phase transition.’ *Nature*, **416**, 608–610 (2002), URL <http://www.nature.com/nature/journal/v416/n6881/full/416608a.html>.
- [108] A. Pais. ‘Einstein and the quantum theory.’ *Reviews of Modern Physics*, **51**, 863–914 (1979), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.51.863>.
- [109] B. Peropadre, P. Forn-Díaz, E. Solano, and J. J. García-Ripoll. ‘Switchable Ultrastrong Coupling in Circuit QED.’ *Physical Review Letters*, **105**, 023601 (2010), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.105.023601>.
- [110] M. Planck. ‘Über das Gesetz der Energieverteilung im Normalspektrum.’ *Annalen der Physik*, **4**, 453 (1901).
- [111] B. Plourde. ‘Plourde Lab Home Page.’ <http://www.phy.syr.edu/~bplourde/bltp-equip.htm>.
- [112] R. Puebla, A. Relaño, and J. Retamosa. ‘Excited-state phase transition leading to symmetry-breaking steady states in the Dicke model.’ *Physical Review A*, **87**, 023819 (2013), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.87.023819>.
- [113] J. M. Raimond, M. Brune, and S. Haroche. ‘Manipulating quantum entanglement with atoms and photons in a cavity.’ *Reviews of Modern Physics*, **73**, 565–582 (2001), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.73.565>.
- [114] N. E. Rehler and J. H. Eberly. ‘Superradiance.’ *Physical Review A*, **3**, 1735–1751 (1971), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.3.1735>.
- [115] J. Reslen, L. Quiroga, and N. F. Johnson. ‘Direct equivalence between quantum phase transition phenomena in radiation-matter and magnetic systems : Scaling of entanglement.’ *EPL (Europhysics Letters)*, **69**, 8 (2005), URL <http://iopscience.iop.org/0295-5075/69/1/008>.
- [116] K. Rzażewski, K. Wódkiewicz, and W. Żakowicz. ‘Phase Transitions, Two-Level Atoms, and the A2 Term.’ *Physical Review Letters*, **35**, 432–434 (1975), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.35.432>.

- [117] K. Rzaewski and K. Wódkiewicz. ‘Stability of matter interacting with photons.’ *Physical Review A*, **43**, 593–594 (1991), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.43.593>.
- [118] S. Sachdev. *Quantum Phase Transitions*. Cambridge University Press, Cambridge ; New York (2011).
- [119] G. Scalari, C. Maissen, D. Turčinková, D. Hagenmüller, S. De Liberato, C. Ciuti, C. Reichl, D. Schuh, W. Wegscheider, M. Beck, and J. Faist. ‘Ultrastrong Coupling of the Cyclotron Transition of a 2D Electron Gas to a THz Metamaterial.’ *Science*, **335**, 1323–1326 (2012), <http://www.sciencemag.org/content/335/6074/1323.full.pdf>, URL <http://www.sciencemag.org/content/335/6074/1323.abstract>.
- [120] M. Scheibner, T. Schmidt, L. Worschech, A. Forchel, G. Bacher, T. Passow, and D. Hommel. ‘Superradiance of quantum dots.’ *Nature Physics*, **3**, 106–110 (2007), URL <http://www.nature.com/nphys/journal/v3/n2/abs/nphys494.html>.
- [121] W. P. Schleich. *Quantum Optics in Phase Space*. Wiley VCH, Berlin ; New York (2001).
- [122] R. J. Schoelkopf and S. M. Girvin. ‘Wiring up quantum systems.’ *Nature*, **451**, 664–669 (2008), URL <http://dx.doi.org/10.1038/451664a>.
- [123] G. Shvets, N. J. Fisch, A. Pukhov, and J. Meyer-ter Vehn. ‘Superradiant Amplification of an Ultrashort Laser Pulse in a Plasma by a Counterpropagating Pump.’ *Physical Review Letters*, **81**, 4879–4882 (1998), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.81.4879>.
- [124] N. Skribanowitz, I. P. Herman, J. C. MacGillivray, and M. S. Feld. ‘Observation of Dicke Superradiance in Optically Pumped HF Gas.’ *Physical Review Letters*, **30**, 309–312 (1973), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.30.309>.
- [125] A. D. Stone. *Einstein and the Quantum : The Quest of the Valiant Swabian*. Princeton University Press (2013).
- [126] P. Strack and S. Sachdev. ‘Dicke Quantum Spin Glass of Atoms and Photons.’ *Physical Review Letters*, **107**, 277202 (2011), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.107.277202>.
- [127] M. Tavis and F. W. Cummings. ‘Exact Solution for an N -Molecule—Radiation-Field Hamiltonian.’ *Physical Review*, **170**, 379–384 (1968), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.170.379>.

- [128] R. J. Thompson, G. Rempe, and H. J. Kimble. ‘Observation of normal-mode splitting for an atom in an optical cavity.’ *Physical Review Letters*, **68**, 1132–1135 (1992), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.68.1132>.
- [129] D. Tolkunov and D. Solenov. ‘Quantum phase transition in the multimode Dicke model.’ *Physical Review B*, **75**, 024402 (2007), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.75.024402>.
- [130] A. F. van Loo, A. Fedorov, K. Lalumière, B. C. Sanders, A. Blais, and A. Wallraff. ‘Photon-Mediated Interactions Between Distant Artificial Atoms.’ *Science*, **342**, 1494–1496 (2013), URL <http://www.sciencemag.org/content/342/6165/1494.abstract>.
- [131] G. Vidal, J. I. Latorre, E. Rico, and A. Kitaev. ‘Entanglement in Quantum Critical Phenomena.’ *Physical Review Letters*, **90**, 227902 (2003), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.90.227902>.
- [132] J. Vidal and S. Dusuel. ‘Finite-size scaling exponents in the Dicke model.’ *Europhysics Letters*, **74**, 817 (2006), URL <http://iopscience.iop.org/0295-5075/74/5/817>.
- [133] J. Vidal, G. Palacios, and R. Mosseri. ‘Entanglement in a second-order quantum phase transition.’ *Physical Review A*, **69**, 022107 (2004), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.69.022107>.
- [134] O. Viehmann, J. von Delft, and F. Marquardt. ‘Superradiant Phase Transitions and the Standard Description of Circuit QED.’ *Physical Review Letters*, **107**, 113602 (2011), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.107.113602>.
- [135] A. Vukics and P. Domokos. ‘Adequacy of the Dicke model in cavity QED : A counter-no-go statement.’ *Physical Review A*, **86**, 053807 (2012), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.86.053807>.
- [136] A. Vukics, T. Grieser, and P. Domokos. ‘Elimination of the A-Square Problem from Cavity QED.’ *Physical Review Letters*, **112**, 073601 (2014), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.112.073601>.
- [137] A. Wallraff, D. I. Schuster, A. Blais, L. Frunzio, R.-S. Huang, J. Majer, S. Kumar, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf. ‘Strong coupling of a single photon to a superconducting qubit using circuit quantum electrodynamics.’ *Nature*, **431**, 162–167 (2004), URL <http://www.nature.com/nature/journal/v431/n7005/abs/nature02851.html>.

- [138] Y. K. Wang and F. T. Hioe. ‘Phase Transition in the Dicke Model of Superradiance.’ *Physical Review A*, **7**, 831–836 (1973), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.7.831>.